HAVO
B
DEEL 3

GETAL & RUIMTE

UITWERKINGEN

3

NOORDHOFF UITGEVERS

GETAL& RUIMTE

Uitwerkingen havo B deel 3

ELFDE EDITIE, 2016

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers Groningen

Inhoud

9 Exponentiële verbanden *4*

10 Meetkundige berekeningen *27*

11 Verbanden en functies *81*

12 Examentraining *92*

Wiskunde Olympiade *117*

Gemengde opgaven *122*

Voor sommige (computer) opgaven is geen uitwerking opgenomen.
Deze zijn aangegeven met een *.

© Noordhoff Uitgevers bv

9 Exponentiële verbanden

Voorkennis De vermenigvuldigingsfactor

Bladzijde 9

1 **a** 1,37
b 0,84
c 1,015
d 0.188
e 2,7
f 0,9818
g 1,0022
h 0,9991

2 **a** toename van 27,5%
b toename van 108%
c afname van 46%
d afname van 0,7%
e toename van 0,54%
f afname van 94%
g toename van 40%
h toename van 500%

3 **a** NIEUW = 1,076 × 852 = 916,752
b NIEUW = 0,877 × 8700 = 7629,9
c NIEUW = 1,28 × 3,2 miljoen = 4,096 miljoen
d NIEUW = 0,17 × 6,32 miljard = 1,0744 miljard

4 **a** In 2013 was de gemiddelde verkoopprijs van een nieuwe fiets 1,09 × 726 = 791,34 euro.
b In 2013 werden 0,787 × 1 281 000 = 1 008 147 nieuwe fietsen verkocht.
c In 2013 was de totale besteding 0,857 × 930 miljoen = 797,01 miljoen euro.

9

Bladzijde 10

5 **a** De vermenigvuldigingsfactor is 1,234 × 1,192 ≈ 1,471.
De toename is 47,1%.
b De vermenigvuldigingsfactor is 0,896 × 0,842 ≈ 0,754.
De afname is 24,6%.
c De vermenigvuldigingsfactor is 1,56 × 0,73 ≈ 1,139.
De toename is 13,9%.

6 De vermenigvuldigingsfactor is 1,55 × 1,436 × 1,406 × 1,371 × 1,17 × 1,433 ≈ 7,194.
De toename is 620%.

Bladzijde 11

7 **a** 4 jaar later, dus het bedrag is $7500 \times 1{,}015^4 \approx 7960{,}23$ euro.
b 10 jaar later, dus de vermenigvuldigingsfactor is $1{,}015^{10} \approx 1{,}161$.
Dus het bedrag neemt toe met 16,1%.
c Op 1 januari 2020 is het bedrag $7500 \times 1{,}015^8 \approx 8448{,}69$ euro.
In het jaar 2020 krijgt ze hierover 8448,69 × 0,105 = 126,73 euro rente.

8 **a** 10 jaar later, dus het aantal is $1280 \times 0{,}965^{10} \approx 896$ winkels.
b De afname is $1280 \times 0{,}965^{12} - 1280 \times 0{,}965^{16} \approx 111$ winkels.
c De helft van 1280 is 640.
Voer in $y_1 = 1280 \times 0{,}965^x$.
De tabel geeft $x = 19$ en $y = 650$
$x = 20$ en $y = 627$
Dus het aantal muziekwinkels is in 2019 gehalveerd.

© Noordhoff Uitgevers bv

9.1 Twee soorten groei

Bladzijde 12

1 Van 2005 tot 2014 is 9 jaar.
Per jaar 120 erbij, dus in 2014 is het aantal bedrijven $2400 + 9 \cdot 120 = 3480$.

2 **a** Stel $H = at + b$ met $a = \frac{\Delta H}{\Delta t} = \frac{600 - 552}{10 - 4} = 8$.

$$\left.\begin{array}{l} H = 8t + b \\ t = 10 \text{ en } H = 600 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 10 + b = 600 \\ 80 + b = 600 \\ b = 520 \end{array}$$

Dus $H = 8t + 520$.

b Stel $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{630 - 750}{14 - 6} = -15$.

$$\left.\begin{array}{l} N = -15t + b \\ t = 6 \text{ en } N = 750 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -15 \cdot 6 + b = 750 \\ -90 + b = 750 \\ b = 840 \end{array}$$

Dus $N = -15t + 840$.

c Stel $B = aq + b$ met $a = \frac{\Delta B}{\Delta q} = \frac{266 - 164{,}5}{16 - 2} = 7{,}25$.

$$\left.\begin{array}{l} B = 7{,}25q + b \\ q = 2 \text{ en } B = 164{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7{,}25 \cdot 2 + b = 164{,}5 \\ 14{,}5 + b = 164{,}5 \\ b = 150 \end{array}$$

Dus $B = 7{,}25q + 150$.

Bladzijde 13

3 **a** De punten (3; 24,82) en (7; 24,18) geven $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{24{,}18 - 24{,}82}{7 - 3} = -0{,}16$.

De punten (7; 24,18) en (10; 23,7) geven $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{23{,}7 - 24{,}18}{10 - 7} = -0{,}16$.

De punten (10; 23,7) en (15; 22,9) geven $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{22{,}9 - 23{,}7}{15 - 10} = -0{,}16$.

Dus er is een lineair verband.

b Stel $N = at + b$ met $a = \frac{\Delta N}{\Delta t} = -0{,}16$.

$$\left.\begin{array}{l} N = -0{,}16t + b \\ t = 10 \text{ en } N = 23{,}7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}16 \cdot 10 + b = 23{,}7 \\ -1{,}6 + b = 23{,}7 \\ b = 25{,}3 \end{array}$$

Dus $N = -0{,}16t + 25{,}3$.

4 **a** Stel $L_A = at + b$ met $a = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{9{,}1 - 6{,}4}{4 - 1} = 0{,}9$.

$$\left.\begin{array}{l} L_A = 0{,}9t + b \\ t = 1 \text{ en } L_A = 6{,}4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}9 \cdot 1 + b = 6{,}4 \\ 0{,}9 + b = 6{,}4 \\ b = 5{,}5 \end{array}$$

Dus $L_A = 0{,}9t + 5{,}5$.

Stel $L_B = at + b$ met $a = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{9{,}6 - 6{,}3}{4 - 1} = 1{,}1$.

$$\left.\begin{array}{l} L_B = 1{,}1t + b \\ t = 1 \text{ en } L_B = 6{,}3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1{,}1 \cdot 1 + b = 6{,}3 \\ 1{,}1 + b = 6{,}3 \\ b = 5{,}2 \end{array}$$

Dus $L_B = 1{,}1t + 5{,}2$.

b $L_A > 11{,}5$ geeft $0{,}9t + 5{,}5 > 11{,}5$
$0{,}9t > 6$
$t > 6{,}7$

Dus in september 2016 is de lengte voor het eerst meer dan 11,5 cm.

9

© Noordhoff Uitgevers bv

c $L_B = L_A + 2$ geeft $1{,}1t + 5{,}2 = 0{,}9t + 5{,}5 + 2$
$0{,}2t = 2{,}3$
$t = 11{,}5$
In februari 2017 is de haarlengte van Bo 2 cm minder dan die van Ans.

d $L_A = 25$ geeft $0{,}9t + 5{,}5 = 25$
$0{,}9t = 19{,}5$
$t = 21\frac{2}{3}$
$L_B = 25$ geeft $1{,}1t + 5{,}2 = 25$
$1{,}1t = 19{,}8$
$t = 18$
Beiden hebben een haarlengte boven 25 cm op $t = 21\frac{2}{3}$.
Hierbij hoort 21 maanden en 20 dagen na 1 maart 2016, dus vanaf 20 december 2017.

5 9 jaar later, dus de omzet is $1{,}13^9 \times 420$ miljoen ≈ 1262 miljoen euro.

Bladzijde 15

6 **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 10{,}63$ en $g = 1{,}016$ geeft $N = 10{,}63 \cdot 1{,}016^t$.

b 1 januari 2020 geeft $t = 6$.
$t = 6$ geeft $N = 10{,}63 \cdot 1{,}016^6 = 11{,}692...$
Dus 11,69 miljoen inwoners op 1 januari 2020.

c Voer in $y_1 = 10{,}63 \cdot 1{,}016^x$ en $y_2 = 12$.
Intersect geeft $x = 7{,}63...$
Dus in $2014 + 7 = 2021$ komt het aantal inwoners voor het eerst boven 12 miljoen.

d $t = -4$ geeft $y_1 = 9{,}976...$
Dus op 1 januari 2010 had Bolivia 9,98 miljoen inwoners.

e De toename is elk jaar 1,6%, dus ook in 2025.

7 **a** $V_z = b \cdot g^t$ met $b = 5600$ en $g = 1{,}4$ geeft $V_z = 5600 \cdot 1{,}4^t$.
$V_w = at + b$ met $a = 8000$ en $b = 62\,000$ geeft $V_w = 8000t + 62\,000$.

b Los op $V_z > 2 \cdot V_w$.
Voer in $y_1 = 5600 \cdot 1{,}4^x$ en $y_2 = 2(8000x + 62\,000)$.
Intersect geeft $x = 11{,}98...$
Dus eind 2017 is het totale vermogen aan zonne-energie voor het eerst meer dan twee keer zo groot als het totale vermogen aan windenergie.

9

8 **a** $N = b \cdot g^t$ met $b = 150$ en $g = 1{,}063$ geeft $N = 150 \cdot 1{,}063^t$.

b Bij 1 januari 2011 hoort $t = 24$. Dit geeft $N = 150 \cdot 1{,}063^{24} = 649{,}9...$
Dus 650 miljoen actieve deelnemers.

c $t = 11\frac{29}{30}$ geeft $N = 311{,}6...$ en $t = 12$ geeft $N = 312{,}2...$
$312{,}2... - 311{,}6... = 0{,}635... > 0{,}6$
Dus eind 2009 was de stijging meer dan 0,6 miljoen = 600 000 gebruikers per dag.
De bewering klopt dus.

d $N = at + b$ met $a = \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{1226 - 649{,}9...}{36} = 16{,}0...$

$$\left.\begin{array}{l} N = 16t + b \\ t = 24 \text{ en } N = 650 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 16 \cdot 24 + b = 650 \\ 384 + b = 650 \\ b = 266 \end{array}$$

Dus $N = 16t + 266$.

e 1 miljard = 1000 miljoen
$N = 1000$ geeft $16t + 266 = 1000$
$16t = 734$
$t = 45{,}8...$
Bij $t = 45{,}8$ hoort de maand oktober 2012.

Bladzijde 16

9 **a** $\dfrac{8900}{8200} \approx 1{,}09$, $\dfrac{9700}{8900} \approx 1{,}09$, $\dfrac{10\,600}{9700} \approx 1{,}09$ en $\dfrac{11\,600}{10\,600} \approx 1{,}09$. De uitkomsten zijn gelijk, dus er is sprake van exponentiële groei.

b $O = b \cdot g^t$ met $b = 8200$ en $g = 1{,}09$ geeft $O = 8200 \cdot 1{,}09^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Bij 2018 hoort $t = 8$.
$t = 8$ geeft $O = 8200 \cdot 1{,}09^8 = 16339{,}0...$
$\frac{O}{17{,}1} = \frac{16339{,}0}{17{,}1} = 955{,}49...$
Dus per Nederlander is de omzet €955,50.

Bladzijde 17

10 5% erbij geeft de vermenigvuldigingsfactor 1,05.
Dus de groeifactor is 1,05.

11

groeipercentage	13%	3,3%	120%	0,7%	12%	6%	150%	23,7%
groeifactor	1,13	1,033	2,2	1,007	1,12	1,06	2,5	1,237

Bladzijde 18

12

afname in procenten	13%	41,8%	6,2%	0,3%	2%	0,1%	75,4%
groeifactor	0,87	0,582	0,938	0,997	0,98	0,999	0,246

13 **a** 1,127
b 0,932
c 73,5%
d 15,5%
e 142%
f 0,993

14 **a** $B = b \cdot g^t$ met $b = 5000$ en $g = 1{,}013$ geeft $B = 5000 \cdot 1{,}013^t$.
b Voer in $y_1 = 5000 \cdot 1{,}013^x$.
Bij 1 januari 2020 hoort $t = 5$ en bij 1 januari 2021 hoort $t = 6$.
Lees af $t = 5$ geeft $y_1 = 5333{,}56$
$t = 6$ geeft $y_1 = 5402{,}90$
Dus een toename van $5402{,}90 - 5333{,}56 = 69{,}34$ euro.
c De tabel geeft $t = 14$ en $y_1 = 5991{,}04$
$t = 15$ en $y_1 = 6068{,}92$
Dus op 1 januari 2030 staat er voor het eerst meer dan 6000 euro op de rekening.
d De tabel geeft $t = 16$ en $y_1 = 6147{,}82$
$t = 17$ en $y_1 = 6227{,}74$, dus toename in 2031 is 79,92
$t = 18$ en $y_1 = 6308{,}70$, dus toename in 2032 is 80,96
Dus in het jaar 2032 is de toename voor het eerst meer dan 80 euro.

15 **a** $\frac{75{,}5}{80{,}0} \approx 0{,}944$ $\quad \frac{71{,}3}{75{,}5} \approx 0{,}944$ $\quad \frac{67{,}3}{71{,}3} \approx 0{,}944$ $\quad \frac{63{,}5}{67{,}3} \approx 0{,}944$ $\quad \frac{60{,}0}{63{,}5} \approx 0{,}945$
De uitkomsten verschillen weinig, dus bij benadering exponentiële afname.
b $\left.\begin{array}{l} P = b \cdot g^t \\ b = 80{,}0 \\ g = 0{,}944 \end{array}\right\} P = 80{,}0 \cdot 0{,}944^t$
c $t = 7$ geeft $P = 80{,}0 \cdot 0{,}944^4 \approx 53{,}44$, dus in 2030 woont 46,56% in de steden.
In 2030 wonen er in Afrika naar verwachting $1 \cdot 1{,}03^{20} \approx 1{,}806$ miljard mensen.
Hiervan wonen naar verwachting $0{,}4656 \cdot 1{,}806 \approx 0{,}841$ miljard ofwel 841 miljoen in de steden.

Bladzijde 19

16 **a** $\left.\begin{array}{l} H_k = at + b \text{ met } b = 80 \\ 18 \text{ mg eraf, dus } a = -18 \end{array}\right\} H_k = -18t + 80$

$\left.\begin{array}{l} H_d = b \cdot g^t \text{ met } b = 80 \\ 15\% \text{ eraf, dus } g = 0{,}85 \end{array}\right\} H_d = 80 \cdot 0{,}85^t$
b $H_k = 0$ geeft $-18t + 80 = 0$
$-18t = -80$
$t = 4\frac{4}{9}$
$t = 4\frac{4}{9}$ geeft $H_d = 80 \cdot 0{,}85^{4\frac{4}{9}} \approx 39$ mg.

© Noordhoff Uitgevers bv

c 40% van 80 is $0{,}40 \cdot 80 = 32$.
Voer in $y_1 = 80 \cdot 0{,}85^x$ en $y_2 = 32$. Intersect geeft $x \approx 5{,}638$.
Dus na 5 dagen en $0{,}638 \cdot 24 \approx 15$ uren stabiliseert de hoeveelheid vitamine C zich.

d Los op $H_d = 3H_k$ ofwel $80 \cdot 0{,}5^t = 3(-18t + 80)$.
Voer in $y_1 = 80 \cdot 0{,}5^x$ en $y_2 = 3(-18x + 80)$.
Intersect geeft $x \approx 3{,}622$.
Dus na $3{,}622 \cdot 24 \approx 87$ uren.

17 Het exponentiële model is $N_e = 470\,000 \cdot 1{,}094^t$ met t in maanden en $t = 0$ op 1 januari 2010.
Het lineaire model is $N_l = 470\,000 + 200\,000t$ met t in maanden en $t = 0$ op 1 januari 2010.
Voer in $y_1 = 470\,000 \cdot 1{,}094^x$ en $y_2 = 470\,000 + 200\,000x$.
Intersect geeft $t = 28{,}74...$
$t = 28{,}74...$ geeft 2 jaar en 4,7... maanden, dus in mei 2012 is het artikel geplaatst.

9.2 Exponentiële groeiformules

Bladzijde 21

18 **a**

tijd in jaren	0	1	2	3	4	5
hoeveelheid N	2	18	162	1458	13 122	118 098

b met $9 \cdot 9 = 81$

c $4{,}5 \cdot 4{,}5 = 20{,}25 > 9$, dus wordt N per halfjaar met minder dan 4,5 vermenigvuldigd.

Bladzijde 22

19 **a** $g_{\text{kwartier}} = 1{,}18$
$g_{\text{uur}} = 1{,}18^4 \approx 1{,}939$
Dus de toename is 93,9% per uur.

b $g_{\text{kwartier}} = 1{,}18$
$g_{5\text{ minuten}} = 1{,}18^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}057$

c $g_{\text{kwartier}} = 1{,}18$
$g_{5\text{ uur}} = 1{,}18^{20} \approx 27{,}39$
Dus de toename is 2639% per 5 uur.

9

20 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}88$
$g_{\text{week}} = 0{,}88^7 \approx 0{,}409$

b $g_{\text{dag}} = 0{,}88$
$g_{\text{uur}} = 0{,}88^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}995$
Dus de afname is 0,5% per uur.

c $g_{\text{dag}} = 0{,}88$
$g_{\text{kwartier}} = 0{,}88^{\frac{1}{96}} \approx 0{,}9987$
Dus de afname is 0,13% per kwartier.

21 **a** $g_{\text{dag}} = 1{,}2$
$g_{\text{week}} = 1{,}2^7 \approx 3{,}58$
Dus de toename is 258% per week.

b $g_{\text{dag}} = 1{,}2$
$g_{4\text{ uur}} = 1{,}2^{\frac{1}{6}} \approx 1{,}031$
Dus de toename is 3,1% per 4 uur.

Bladzijde 23

22 **a** $g_{\text{uur}} = 0{,}815$
$g_{\text{kwartier}} = 0{,}815^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}950$
Dus de afname is 5,0% per kwartier.

b $g_{\text{jaar}} = 1{,}014$
$g_{25\text{ jaar}} = 1{,}014^{25} \approx 1{,}416$
Dus de toename is 41,6% per 25 jaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $g_{\text{week}} = 2{,}5$
$g_{\text{dag}} = 2{,}5^{\frac{1}{7}} \approx 1{,}140$
Dus de toename is 14,0% per dag.

23 **a** $g_{\text{dag}} = 1{,}05$
$g_{\text{week}} = 1{,}05^7 \approx 1{,}407$
Dus de toename is 40,7% per week.

b $g_{\text{dag}} = 1{,}5$
$g_{\text{week}} = 1{,}5^7 \approx 17{,}086$

c $g_{\text{uur}} = 0{,}80$
$g_{\text{kwartier}} = 0{,}80^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}946$
Dus de afname is 5,4% per kwartier.

d $g_{\text{uur}} = 0{,}7$
$g_{\text{kwartier}} = 0{,}7^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}915$

24 **a** $g_{10\text{ jaar}} = 0{,}70$
$g_{\text{jaar}} = 0{,}7^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}965$
Dus de afname is 3,5% per jaar.

b $g_{15\text{ jaar}} = 30$
$g_{\text{jaar}} = 30^{\frac{1}{15}} \approx 1{,}255$
Dus de toename is 25,5% per jaar.

c $g_{40\text{ jaar}} = 0{,}5$
$g_{\text{jaar}} = 0{,}5^{\frac{1}{40}} \approx 0{,}983$
Dus de afname is 1,7% per jaar.

25 **a** $g_{4\text{ uur}} = \dfrac{300\,000}{50\,000} = 6$

b $g_{\text{uur}} = 6^{\frac{1}{4}} \approx 1{,}565$

Bladzijde 24

26 **a** Stel $N = b \cdot g^t$.

$g_{3\text{ uur}} = \dfrac{3240}{2510}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\dfrac{3240}{2510}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}0888...$

$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}0888...^t \\ t = 4 \text{ en } N = 2510 \end{array}\right\}$ $b \cdot 1{,}0888...^4 = 2510$

$b = \dfrac{2510}{1{,}0888...^4} = 1785{,}8...$

Dus $N = 1786 \cdot 1{,}089^t$.

b Stel $N = b \cdot g^t$.

$g_{5\text{ uur}} = \dfrac{1\,130\,000}{180\,000}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\dfrac{1\,130\,000}{180\,000}\right)^{\frac{1}{5}} = 1{,}4439...$

$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}4439...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 180\,000 \end{array}\right\}$ $b \cdot 1{,}4439...^3 = 180\,000$

$b = \dfrac{180\,000}{1{,}4439...^3} = 59\,784{,}5...$

Dus $N = 59\,785 \cdot 1{,}44^t$.

c Stel $H = b \cdot g^t$.

$g_{7\text{ uur}} = \dfrac{0{,}41}{0{,}75}$, dus $g_{\text{uur}} = \left(\dfrac{0{,}41}{0{,}75}\right)^{\frac{1}{7}} = 0{,}9173...$

$\left.\begin{array}{l} H = b \cdot 0{,}9173...^t \\ t = 2 \text{ en } H = 0{,}75 \end{array}\right\}$ $b \cdot 0{,}9173...^2 = 0{,}75$

$b = \dfrac{0{,}75}{0{,}9173...^2} = 0{,}891...$

Dus $H = 0{,}891 \cdot 0{,}917^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

27 **a** Stel $N = b \cdot g^t$.

$g_{4\text{ dagen}} = \frac{1780}{850}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1780}{850}\right)^{\frac{1}{4}} = 1{,}2029...$

$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 1{,}2029...^t \\ t = 3 \text{ en } N = 850 \end{array}\right\}$ $b \cdot 1{,}2029...^3 = 850$

$b = \frac{850}{1{,}2029...^3} = 488{,}2...$

Dus $N = 488 \cdot 1{,}203^t$.

b Stel $M = b \cdot g^t$.

$g_{5\text{ jaar}} = \frac{1250}{4500}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1250}{4500}\right)^{\frac{1}{5}} = 0{,}7739...$

$\left.\begin{array}{l} N = b \cdot 0{,}7739...^t \\ t = 4 \text{ en } M = 4500 \end{array}\right\}$ $b \cdot 0{,}7739...^4 = 4500$

$b = \frac{4500}{0{,}7739...^4} = 12\,538{,}7...$

Dus $M = 12\,500 \cdot 0{,}774^t$.

Bladzijde 25

28 Stel $B = b \cdot g^t$ met t in jaren en $t = 0$ op 1 januari 2009.

$g_{3\text{ jaar}} = \frac{1091{,}93}{1005{,}11}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{1091{,}93}{1005{,}11}\right)^{\frac{1}{3}} = 1{,}0280...$

$\left.\begin{array}{l} B = b \cdot 1{,}0280...^t \\ t = 4 \text{ en } B = 1005{,}11 \end{array}\right\}$ $b \cdot 1{,}0280...^4 = 1005{,}11$

$b = \frac{1005{,}11}{1{,}0280...^4} = 899{,}99...$

Dus Nathalie heeft een bedrag van 900 euro op de bank gezet.

29 **a** Stel $V = b \cdot g^t$.

$g_{5\text{ weken}} = \frac{62}{75}$, dus $g_{\text{dag}} = \left(\frac{62}{75}\right)^{\frac{1}{5}} = 0{,}9626...$

$\left.\begin{array}{l} V = b \cdot 0{,}9626...^t \\ t = 2 \text{ en } V = 75 \end{array}\right\}$ $b \cdot 0{,}9626...^2 = 75$

$b = \frac{75}{0{,}9626...^2} = 80{,}933...$

Dus $V = 80{,}9 \cdot 0{,}963^t$.

b Vlak na de tia was het verlies aan gezichtsvermogen 80,9%.

c 90% van het gezichtsvermogen betekent $V = 10$.
Voer in $y_1 = 80{,}9 \cdot 0{,}963^x$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x \approx 55{,}5$.
Dus na 55 weken zal Jan weer 90% van zijn oorspronkelijke gezichtsvermogen terug hebben.

30 **a** $\frac{897}{1013} \approx 0{,}885$ $\quad \frac{793}{897} \approx 0{,}884$ $\quad \frac{702}{793} \approx 0{,}885$ $\quad \frac{621}{702} \approx 0{,}885$ $\quad \frac{550}{621} \approx 0{,}886$

De uitkomsten verschillen weinig, dus er is een exponentieel verband tussen de luchtdruk en de hoogte.

b $P = 1013 \cdot 0{,}885^h$

c $h = 12$ geeft $P = 1013 \cdot 0{,}885^{12} = 233{,}8...$
$h = 0{,}5$ geeft $P = 1013 \cdot 0{,}885^{0{,}5} = 952{,}9...$
De procentuele toename is $\frac{952{,}9... - 233{,}8...}{233{,}8...} \times 100\% \approx 308\%$.

Bladzijde 26

31 **a** $\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P_r = b \cdot g^d \\ g_{5\text{ m}} = 0{,}08 \text{ geeft } g_m = 0{,}08^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}603 \\ b = 100 \end{array}\right\}$ $P_r = 100 \cdot 0{,}603^d$

$\left.\begin{array}{l} \text{Stel } P_b = b \cdot g^d \\ g_{5\text{ m}} = 0{,}17 \text{ geeft } g_m = 0{,}17^{\frac{1}{5}} \approx 0{,}702 \\ b = 100 \end{array}\right\}$ $P_b = 100 \cdot 0{,}702^d$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $P_r = 1$ geeft $100 \cdot 0{,}603^d = 1$
Voer in $y_1 = 100 \cdot 0{,}603^x$ en $y_2 = 1$.
Intersect geeft $x \approx 9{,}10$.
Dus tot een diepte van 9,1 meter dringt 1% rood licht door.
$d = 9{,}10$ geeft $P_b = 100 \cdot 0{,}702^{9{,}10} \approx 4\%$
Dus 4% van het blauwe licht dringt tot dezelfde diepte door.

32 **a** $\sqrt{2} : 1 \approx 1{,}414 : 1$
A0 $1189 : 841 \approx 1{,}414 : 1$ klopt
A4 $297 : 210 \approx 1{,}414 : 1$ klopt
b $g^4 = \frac{210}{841}$, dus $g = \left(\frac{210}{841}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}707$.
c Stel $l_n = b \cdot g^n$ met $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$b = 1189$
$g^4 = \frac{297}{1189}$, dus $g = \left(\frac{297}{1189}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}707$.
Dus $l_n = 1189 \cdot 0{,}707^n$.
d $A_n = l_n \cdot b_n = 1189 \cdot 0{,}707^n \cdot 841 \cdot 0{,}707^n = 999\,949 \cdot 0{,}707^{2n}$
$= 999\,949 \cdot (0{,}707^2)^n \approx 1\,000\,000 \cdot 0{,}5^n$ (mm^2)
Dus voor A in m^2 geldt de formule $A_n = 1 \cdot 0{,}5^n = 0{,}5^n$ (m^2)
e 100 cm^2 = 0,01 m^2
Voer in $y_1 = 0{,}5^x$ en kijk in de tabel.
$x = 6$ geeft $y_1 \approx 0{,}016$
$x = 7$ geeft $y_1 \approx 0{,}008$
Dus vanaf A7 is de oppervlakte minder dan 100 cm^2.

33 **a** Als de bal voor de eerste keer de grond raakt heeft hij
$4 + 2 \cdot 0{,}8 \cdot 4 + 2 \cdot 0{,}8^2 \cdot 4 + 2 \cdot 0{,}8^3 \cdot 4 \approx 19{,}62$ m, dus 1962 cm afgelegd.
b Stel de hoogte is h.
Dan is de hoogte na n keer stuiteren gegeven door $h = 4 \cdot 0{,}8^n$.
Voer in $y_1 = 4 \cdot 0{,}8^x$ en kijk in de tabel.
$x = 16$ geeft $y_1 \approx 0{,}11$
$x = 17$ geeft $y_1 \approx 0{,}09$
Dus na 17 keer stuiteren komt de bal voor het eerst niet hoger dan 10 cm.
c Er geldt $b \cdot 0{,}8^3 = 4$, met b de hoogte waarop de bal is losgelaten.
Dit geeft $b = \frac{4}{0{,}8^3} \approx 7{,}81$.
Dus de bal is op een hoogte van 781 cm losgelaten.

9.3 Rekenen met logaritmen

Bladzijde 28

34 Omdat ${}^2\log(8) = 3$, is $2^{{}^2\log(8)} = 2^3 = 8$

Bladzijde 29

35 **a** ${}^2\log(10) + {}^2\log(12) = {}^2\log(10 \cdot 12) = {}^2\log(120)$
b ${}^{\frac{1}{2}}\log(60) - {}^{\frac{1}{2}}\log(12) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{60}{12}\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log(5)$
c $2 \cdot {}^3\log(6) + {}^3\log(2) = {}^3\log(6^2) + {}^3\log(2) = {}^3\log(36) + {}^3\log(2) = {}^3\log(36 \cdot 2) = {}^3\log(72)$
d ${}^5\log(50) - 2 \cdot {}^5\log(10) = {}^5\log(50) - {}^5\log(10^2) = {}^5\log(50) - {}^5\log(100) = {}^5\log\left(\frac{50}{100}\right) = {}^5\log\left(\frac{1}{2}\right)$
e $5 \cdot \log(2) - 3 \cdot \log(4) = \log(2^5) - \log(4^3) = \log(32) - \log(64) = \log\left(\frac{32}{64}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$
f ${}^2\log(1000) - 4 \cdot {}^2\log(10) = {}^2\log(1000) - {}^2\log(10^4) = {}^2\log(1000) - {}^2\log(10\,000) = {}^2\log\left(\frac{1000}{10\,000}\right) = {}^2\log\left(\frac{1}{10}\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

36 **a** $3 + {}^2\log(5) = {}^2\log(2^3) + {}^2\log(5) = {}^2\log(8) + {}^2\log(5) = {}^2\log(8 \cdot 5) = {}^2\log(40)$

b $4 + {}^{\frac{1}{2}}\log(50) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(50) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16}\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(50) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{16} \cdot 50\right) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(3\frac{1}{8}\right)$

c $5 - {}^4\log(100) = {}^4\log(4^5) - {}^4\log(100) = {}^4\log(1024) - {}^4\log(100) = {}^4\log\left(\frac{1024}{100}\right) = {}^4\log\left(10\frac{6}{25}\right)$

d ${}^2\log(20) - {}^3\log(27) = {}^2\log(20) - 3 = {}^2\log(20) - {}^2\log(2^3) = {}^2\log(20) - {}^2\log(8) = {}^2\log\left(\frac{20}{8}\right) = {}^2\log\left(2\frac{1}{2}\right)$

e ${}^5\log(125) - {}^4\log(10) = 3 - {}^4\log(10) = {}^4\log(4^3) - {}^4\log(10) = {}^4\log(64) - {}^4\log(10) = {}^4\log\left(\frac{64}{10}\right) = {}^4\log\left(6\frac{2}{5}\right)$

f $\log(120) - {}^6\log(36) = \log(120) - 2 = \log(120) - \log(100) = \log\left(\frac{120}{100}\right) = \log\left(1\frac{1}{5}\right)$

Bladzijde 30

37 **a** ${}^2\log(a) + 3 \cdot {}^2\log(b) = {}^2\log(a) + {}^2\log(b^3) = {}^2\log(ab^3)$

b $5 \cdot {}^3\log(a) - 2 \cdot {}^3\log(b) = {}^3\log(a^5) - {}^3\log(b^2) = {}^3\log\left(\frac{a^5}{b^2}\right)$

c $2 + {}^5\log(a) = {}^5\log(5^2) + {}^5\log(a) = {}^5\log(25) + {}^5\log(a) = {}^5\log(25a)$

d $2 - {}^3\log(a) = {}^3\log(3^2) - {}^3\log(a) = {}^3\log(9) - {}^3\log(a) = {}^3\log\left(\frac{9}{a}\right)$

e ${}^6\log(a) - 1 = {}^6\log(a) - {}^6\log(6) = {}^6\log\left(\frac{a}{6}\right) = {}^6\log\left(\frac{1}{6}a\right)$

f $2 \cdot {}^5\log(b) + \frac{1}{2} \cdot {}^5\log(a) = {}^5\log(b^2) + {}^5\log\left(a^{\frac{1}{2}}\right) = {}^5\log(b^2) + {}^5\log\left(\sqrt{a}\right) = {}^5\log\left(b^2 \cdot \sqrt{a}\right)$

38 **a** $\log(600) = \log(100 \cdot 6) = \log(100) + \log(6) = 2 + \log(6)$

b ${}^2\log(24) = {}^2\log(8 \cdot 3) = {}^2\log(8) + {}^2\log(3) = 3 + {}^2\log(3)$

c $4 \cdot {}^3\log(54) = 4 \cdot {}^3\log(27 \cdot 2) = 4({}^3\log(27) + {}^3\log(2)) = 4(3 + {}^3\log(2)) = 12 + 4 \cdot {}^3\log(2) = 12 + {}^3\log(16)$

d $2 \cdot {}^5\log(1250) = 2 \cdot {}^5\log(625 \cdot 2) = 2({}^5\log(625) + {}^5\log(2)) = 2(4 + {}^5\log(2)) = 8 + 2 \cdot {}^5\log(2) =$
$8 + {}^5\log(2^2) = 8 + {}^5\log(4)$

e $\log(1600) - 1 = \log(100 \cdot 16) - 1 = \log(100) + \log(16) - 1 = 2 + \log(16) - 1 = 1 + \log(16)$

f $7 + {}^2\log(1600) = 7 + {}^2\log(64 \cdot 25) = 7 + {}^2\log(64) + {}^2\log(25) = 7 + 6 + {}^2\log(25) = 13 + {}^2\log(25)$

39 $\log(x) + \log(5) = 2$
$\log(5x) = 2$
$5x = 10^2$
$5x = 100$
$x = 20$

9

Bladzijde 31

40 **a** ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(4)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(4)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3 \cdot 4)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(12)$
$2x = 12$
$x = 6$
vold.

b ${}^5\log(x) + {}^5\log(6) = {}^5\log(x + 4)$
${}^5\log(6x) = {}^5\log(x + 4)$
$6x = x + 4$
$5x = 4$
$x = \frac{4}{5}$
vold.

c ${}^2\log(x + 1) = 1 - {}^2\log(x)$
${}^2\log(x + 1) + {}^2\log(x) = 1$
${}^2\log(x(x + 1)) = 1$
$x(x + 1) = 2$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x - 1)(x + 2) = 0$
$x = 1 \vee x = -2$
vold. vold. niet

d $\log(4x - 30) = 2 - \log(x)$
$\log(4x - 30) + \log(x) = 2$
$\log(x(4x - 30)) = 2$
$x(4x - 30) = 100$
$4x^2 - 30x - 100 = 0$
$2x^2 - 15x - 50 = 0$
$D = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -50 = 625$
$x = \frac{15 + 25}{4} \vee x = \frac{15 - 25}{4}$
$x = 10 \vee x = -2\frac{1}{2}$
vold. vold. niet

© Noordhoff Uitgevers bv

41 **a** ${}^2\log(x) + {}^2\log(10) = 4$
${}^2\log(10x) = 4$
$10x = 2^4$
$10x = 16$
$x = 1\frac{3}{5}$
vold.

b ${}^3\log(4x) + {}^3\log(5) = 2$
${}^3\log(20x) = 2$
$20x = 3^2$
$20x = 9$
$x = \frac{9}{20}$
vold.

c ${}^2\log(x) = 4 - {}^2\log(3)$
${}^2\log(x) + {}^2\log(3) = 4$
${}^2\log(3x) = 4$
$3x = 2^4$
$3x = 16$
$x = 5\frac{1}{3}$
vold.

d ${}^4\log(x) + {}^4\log(3) = {}^4\log(x + 1)$
${}^4\log(3x) = {}^4\log(x + 1)$
$3x = x + 1$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$
vold.

42 **a** ${}^2\log(x + 6) = 4 - {}^2\log(x)$
${}^2\log(x + 6) + {}^2\log(x) = 4$
${}^2\log(x(x + 6)) = 4$
$x(x + 6) = 2^4$
$x^2 + 6x = 16$
$x^2 + 6x - 16 = 0$
$(x - 2)(x + 8) = 0$
$x = 2 \vee x = -8$
vold. vold. niet

b ${}^{\frac{1}{2}}\log(x - 2) + 3 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x) = 0$
${}^{\frac{1}{2}}\log(x(x - 2)) = -3$
$x(x - 2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
$x^2 - 2x = 8$
$x^2 - 2x - 8 = 0$
$(x + 2)(x - 4) = 0$
$x = -2 \vee x = 4$
vold. niet vold.

c ${}^3\log(2x + 1) - 2 = {}^3\log(x - 3)$
${}^3\log(2x + 1) = 2 + {}^3\log(x - 3)$
${}^3\log(2x + 1) = {}^3\log(3^2) + {}^3\log(x - 3)$
${}^3\log(2x + 1) = {}^3\log(9(x - 3))$
$2x + 1 = 9(x - 3)$
$2x + 1 = 9x - 27$
$-7x = -28$
$x = 4$
vold.

d ${}^3\log(2x) = 1 + {}^3\log(x + 1)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 1)$
${}^3\log(2x) = {}^3\log(3(x + 1))$
$2x = 3(x + 1)$
$2x = 3x + 3$
$-x = 3$
$x = -3$
vold. niet, dus geen opl.

43 **a** ${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3) = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 7)$
${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{2}\right) + {}^{\frac{1}{2}}\log(x + 7)$
${}^{\frac{1}{2}}\log(x + 3) = {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{2}(x + 7)\right)$
$x + 3 = \frac{1}{2}(x + 7)$
$x + 3 = \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$
$x = 1$
vold.

b ${}^4\log(3x + 4) = 3 - {}^4\log(x)$
${}^4\log(3x + 4) + {}^4\log(x) = 3$
${}^4\log(x(3x + 4)) = 3$
$x(3x + 4) = 4^3$
$3x^2 + 4x = 64$
$3x^2 + 4x - 64 = 0$
$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot -64 = 784$
$x = \dfrac{-4 + 28}{6} \vee x = \dfrac{-4 - 28}{6}$
$x = 4 \vee x = -5\frac{1}{3}$
vold. vold. niet

44 **a** De regel ${}^g\log(a) = \dfrac{\log(a)}{\log(g)}$.

b ${}^2\log(25) \approx 4{,}644$
${}^3\log(100) \approx 4{,}192$
$\dfrac{1}{{}^5\log(1000)} \approx 0{,}233$
$\dfrac{1}{5 - {}^2\log(20)} \approx 1{,}475$

Bladzijde 32

45 **a** ${}^3\log(5) \approx 1{,}46$
b ${}^{\frac{1}{7}}\log(18) \approx -1{,}49$
c ${}^2\log(20) - {}^2\log(6) \approx 1{,}74$
d ${}^{\frac{1}{3}}\log(10) + \log\left(\frac{1}{3}\right) \approx -2{,}57$
e $3 \cdot {}^2\log(7) \approx 8{,}42$
f $\dfrac{5}{{}^4\log(12)} \approx 2{,}79$

© Noordhoff Uitgevers bv

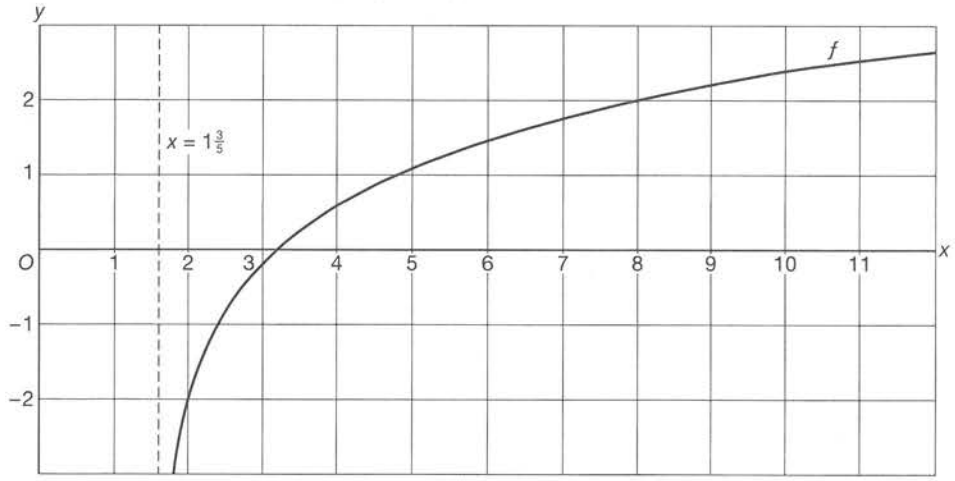
46 **a** $f(2) = {}^2\log(2) = 1$
$g(2) = {}^2\log(0)$ bestaat niet
$h(2) = {}^2\log(7) \approx 2{,}81$
$k(2) = {}^2\log(-1)$ bestaat niet

b Omdat het domein van $f(x) = {}^2\log(x)$ het interval $\langle 0, \rightarrow\rangle$ is, kun je alleen logeritmen nemen van positieve getallen.
Dus $g(2) = {}^2\log(0)$ en $k(2) = {}^2\log(-1)$ bestaan niet.

Bladzijde 34

47 **a** $5x - 8 > 0$ geeft $5x > 8$, dus $x > 1\frac{3}{5}$ en $D_f = \langle 1\frac{3}{5}, \rightarrow\rangle$.
De verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{3}{5}$.
Voer in $y_1 = -3 + {}^2\log(5x - 8)$.

x	2	3	4	6	8	12
$f(x)$	-2	-0,2	0,6	1,5	2	2,7

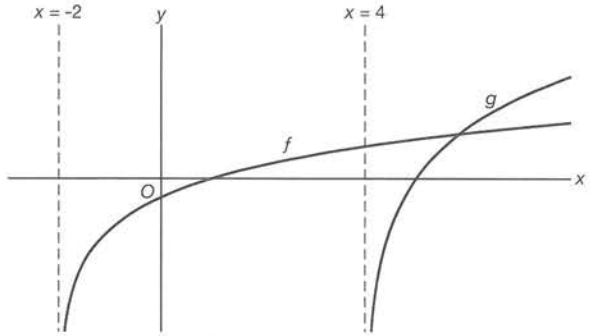


b $f(x) = 0$ geeft $-3 + {}^2\log(5x - 8) = 0$
${}^2\log(5x - 8) = 3$
$5x - 8 = 8$
$5x = 16$
$x = 3\frac{1}{5}$
vold.
$f(x) \leq 0$ geeft $1\frac{3}{5} < x \leq 3\frac{1}{5}$

c $f(8) = 2$
Voor $x \leq 8$ is $f(x) \leq 2$.

48 **a** $y = {}^3\log(x)$
$\downarrow$ translatie $(-2, -1)$
$f(x) = -1 + {}^3\log(x + 2)$
$y = {}^2\log(x)$
$\downarrow$ translatie $(4, 0)$
$g(x) = {}^2\log(x - 4)$

b $x + 2 > 0$ geeft $x > -2$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2$ en $D_f = \langle -2, \rightarrow\rangle$.
$x - 4 > 0$ geeft $x > 4$, dus de verticale asymptoot is de lijn $y = 4$ en $D_g = \langle 4, \rightarrow\rangle$.



c Voer in $y_1 = -1 + {}^3\log(x + 2)$ en $y_2 = {}^2\log(x - 4)$.
Intersect geeft $x \approx 5{,}83$ en $y \approx 0{,}87$, dus het snijpunt is (5,83; 0,87).

d $f(x) \geq g(x)$ geeft $4 < x \leq 5{,}83$

© Noordhoff Uitgevers bv

49 **a** $f(x) = 5$ geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 5$

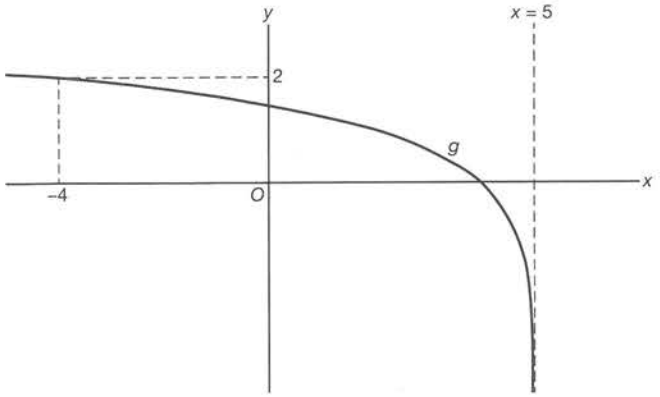
$x + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$x + 3 = \frac{1}{32}$

$x = -2\frac{31}{32}$

vold.

b $-x + 5 > 0$ geeft $-x > -5$ ofwel $x < 5$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 5$ en $D_g = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.



$g(-4) = 2$

Voor $x \geq -4$ is $g(x) \leq 2$.

c $f(x) = 1$ geeft ${}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 1$

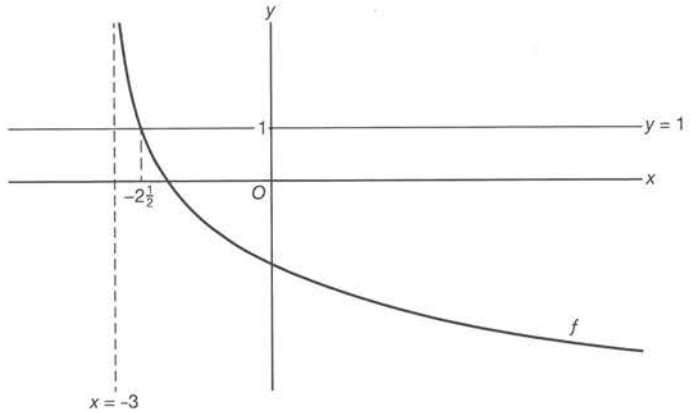
$x + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$x + 3 = \frac{1}{2}$

$x = -2\frac{1}{2}$

vold.

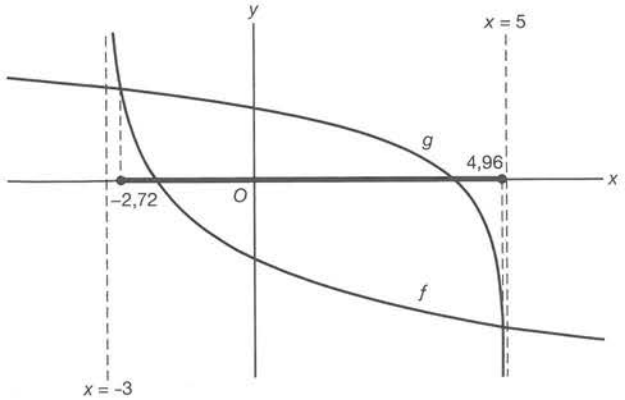
$x + 3 > 0$ geeft $x > -3$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$ en $D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$.



$f(x) \geq 1$ geeft $-3 < x \leq -2\frac{1}{2}$

d Voer in $y_1 = {}^{\frac{1}{2}}\log(x+3) = 5$ en $y_2 = {}^{3}\log(-x+5)$.

Intersect geeft $x \approx -2{,}72$ en $x \approx 4{,}96$.



$f(x) \leq g(x)$ geeft $-2{,}72 \leq x \leq 4{,}96$

e Voer in $y_3 = 2{,}5$.

Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = -2{,}823...$

Intersect met y_2 en y_3 geeft $x = -10{,}588...$

Dus $AB = -2{,}823... - -10{,}588... \approx 7{,}77$.

© Noordhoff Uitgevers bv

50 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{1}{2}\log(x+4) = 1 + \frac{1}{2}\log(4x+6)$

$\frac{1}{2}\log(x+4) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\log(4x+6)$

$\frac{1}{2}\log(x+4) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2}(4x+6)\right)$

$x + 4 = \frac{1}{2}(4x+6)$

$x + 4 = 2x + 3$

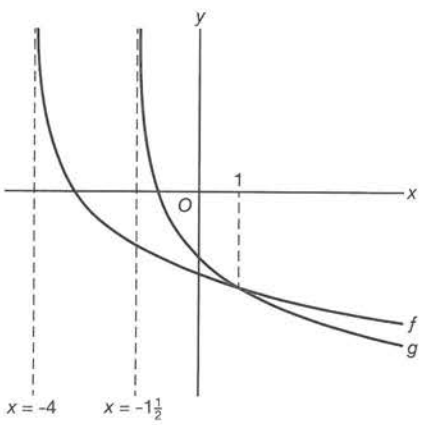
$-x = -1$

$x = 1$

vold.

Het snijpunt is $\left(1, \frac{1}{2}\log(5)\right)$.

b



$f(x) \leq g(x)$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 1$

51 **a** Voer in $y_1 = 25 \cdot 1{,}022^x$.

$t = 0$ geeft $y_1 = 25$

De tabel geeft $y_1 = 50$ voor $t = 32$. Dus na 32 jaar verdubbeld.

b De tabel geeft $y_1 = 42$ voor $t = 24$. Dus na 32 jaar verdubbeld.

c De tijd waarin volgens de formule het inwonertal verdubbelt is onafhankelijk van het begintijdstip.

Bladzijde 35

52 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}131$

$1{,}131^T = 2$

$T = {}^{1,131}\log(2) = 5{,}630...$

De verdubbelingstijd is 5 jaar en ($0{,}630 \cdot 12 = 7{,}567.. \approx$) 8 maanden.

b $g_{\text{week}} = 0{,}915$

$0{,}915^T = \frac{1}{2}$

$T = {}^{0,915}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}802...$

De halveringstijd is 7 weken en ($0{,}802... \cdot 7 = 5{,}620... \approx$) 6 dagen.

53 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}011$

$1{,}011^T = 2$

$T = {}^{1,011}\log(2) = 63{,}359...$

De verdubbelingstijd is 63 jaar.

b $g_{10\text{ jaar}} = 1{,}083$

$1{,}083^T = 2$

$T = {}^{1,083}\log(2) = 8{,}693...$

De verdubbelingstijd is $8{,}693... \cdot 10$ jaar $\approx$ 87 jaar.

54 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}917$

$0{,}917^T = \frac{1}{2}$

$T = {}^{0,917}\log\left(\frac{1}{2}\right) = 7{,}999...$

De halveringstijd is 8 dagen.

b $0{,}917^T = 0{,}1$

$T = {}^{0,917}\log(0{,}1) = 26{,}574...$

Na 27 dagen is nog 10% van de beginhoeveelheid over.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 36

55 **a** $g_{\text{dag}} = 2^{\frac{1}{10}} = 1{,}0717...$
Het groeipercentage per dag is 7,2.

b $g_{25\text{ jaar}} = 2$
$g_{\text{jaar}} = 2^{\frac{1}{25}} = 1{,}0281...$
Het groeipercentage per jaar is 2,8.

c $g_{28\text{ jaar}} = \frac{1}{2}$
$g_{\text{jaar}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{28}} = 0{,}9755...$
De hoeveelheid radioactieve stof neemt met 2,4% per jaar af.

56 **a** 1999 t/m 2003
$1{,}097^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}097}\log(2) \approx 7{,}49$
Dus de verdubbelingstijd is 7 jaar.
2004 en 2005
$1{,}038^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}038}\log(2) \approx 18{,}59$
Dus verdubbelingstijd 19 jaar.
2006 en 2007
$1{,}050^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}050}\log(2) \approx 14{,}21$
Dus verdubbelingstijd 14 jaar.
2008 t/m 2011
$1{,}044^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}044}\log(2) \approx 16{,}10$
Dus verdubbelingstijd 16 jaar.

b $g_{12\text{ jaar}} = 1{,}097^5 \cdot 1{,}038^2 \cdot 1{,}050^2 \cdot 1{,}044^4 = 2{,}241...$
De zorgkosten zijn dus (meer dan) verdubbeld.

c $g^{28} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{28}} = 1{,}0250...$
Dus het groeipercentage is 2,5% per jaar.

9.4 Formules omwerken

Bladzijde 38

57 **a** $N = 200 \cdot 1{,}08^t$
$\log(N) = \log(200 \cdot 1{,}08^t)$
$\log(N) = \log(200) + \log(1{,}08^t)$
$\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1{,}08)$

b $F = 20L^3$
$\log(F) = \log(20L^3)$
$\log(F) = \log(20) + \log(L^3)$
$\log(F) = \log(20) + 3\log(L)$

Bladzijde 39

58 **a** $N = 8000 \cdot 1{,}18^t$
$\log(N) = \log(8000 \cdot 1{,}18^t)$
$\log(N) = \log(8000) + \log(1{,}18^t)$
$\log(N) = \log(8000) + t \cdot \log(1{,}18)$
$\log(N) \approx 3{,}90 + t \cdot 0{,}0719$
Dus $\log(N) = 0{,}0719t + 3{,}90$.

b $N = 22000 \cdot 0{,}83^t$
$\log(N) = \log(22000 \cdot 0{,}83^t)$
$\log(N) = \log(22000) + \log(0{,}83^t)$
$\log(N) = \log(22000) + t \cdot \log(0{,}83)$
$\log(N) \approx 4{,}34 + t \cdot -0{,}0809$
Dus $\log(N) = -0{,}0809t + 4{,}34$.

c $N = 6500 \cdot 1{,}25^{t-2}$
$\log(N) = \log(6500 \cdot 1{,}25^{t-2})$
$\log(N) = \log(6500) + \log(1{,}25^{t-2})$
$\log(N) = \log(6500) + (t-2) \cdot \log(1{,}25)$
$\log(N) = \log(6500) + t \cdot \log(1{,}25) - 2 \cdot \log(1{,}25)$
$\log(N) \approx 3{,}62 + t \cdot 0{,}0969$
Dus $\log(N) = 0{,}0969t + 3{,}62$.

d $N = 18000 \cdot 0{,}74^{2t-3}$
$\log(N) = \log(18000 \cdot 0{,}74^{2t-3})$
$\log(N) = \log(18000) + \log(0{,}74^{2t-3})$
$\log(N) = \log(18000) + (2t-3) \cdot \log(0{,}74)$
$\log(N) = \log(18000) + 2t \cdot \log(0{,}74) - 3 \cdot \log(0{,}74)$
$\log(N) = 4{,}255... + t \cdot -0{,}26153... - 3 \cdot -0{,}26153...$
$\log(N) \approx 4{,}65 + t \cdot -0{,}2615$
Dus $\log(N) = -0{,}2615t + 4{,}65$.

© Noordhoff Uitgevers bv

59 **a** $y = 50x^{1,35}$
$\log(y) = \log(50x^{1,35})$
$\log(y) = \log(50) + \log(x^{1,35})$
$\log(y) = \log(50) + 1,35\log(x)$
$\log(y) \approx 1,70 + 1,35\log(x)$
Dus $\log(y) = 1,70 + 1,35\log(x)$.

b $y = \dfrac{500}{x^2}$
$\log(y) = \log\left(\dfrac{500}{x^2}\right)$
$\log(y) = \log(500) - \log(x^2)$
$\log(y) = \log(500) - 2\log(x)$
$\log(y) \approx 2,70 - 2\log(x)$
Dus $\log(y) = 2,70 - 2\log(x)$.

c $y = 260x^{-2,1}$
$\log(y) = \log(260x^{-2,1})$
$\log(y) = \log(260) + \log(x^{-2,1})$
$\log(y) = \log(260) - 2,1\log(x)$
$\log(y) \approx 2,41 - 2,1\log(x)$
Dus $\log(y) = 2,41 - 2,1\log(x)$.

d $y = \dfrac{80}{x\sqrt{x}} = \dfrac{80}{x \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{80}{x^{1\frac{1}{2}}}$
$\log(y) = \log\left(\dfrac{80}{x^{1\frac{1}{2}}}\right)$
$\log(y) = \log(80) - \log\left(x^{1\frac{1}{2}}\right)$
$\log(y) = \log(80) - 1\frac{1}{2}\log(x)$
$\log(y) \approx 1,90 - 1\frac{1}{2}\log(x)$
Dus $\log(y) = 1,90 - 1\frac{1}{2}\log(x)$.

60 **a** $y = 600 \cdot 2,18^x$
$\log(y) = \log(600 \cdot 2,18^x)$
$\log(y) = \log(600) + \log(2,18^x)$
$\log(y) = \log(600) + x\log(2,18)$
$\log(y) \approx 2,78 + x \cdot 0,34$
Dus $\log(y) = 0,34x + 2,78$.

b $y = 600 \cdot x^{2,18}$
$\log(y) = \log(600 \cdot x^{2,18})$
$\log(y) = \log(600) + \log(x^{2,18})$
$\log(y) = \log(600) + 2,18\log(x)$
$\log(y) \approx 2,78 + 2,18\log(x)$
Dus $\log(y) = 2,78 + 2,18\log(x)$.

c $y = 400 \cdot 1,75^{x-3}$
$\log(y) = \log(400 \cdot 1,75^{x-3})$
$\log(y) = \log(400) + \log(1,75^{x-3})$
$\log(y) = \log(400) + (x-3)\log(1,75)$
$\log(y) = \log(400) + x\log(1,75) - 3\log(1,75)$
$\log(y) \approx 1,87 + 0,24x$
Dus $\log(y) = 0,24x + 1,87$.

d $y = \dfrac{400}{x \cdot \sqrt[3]{x}} = \dfrac{400}{x \cdot x^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{400}{x^{1\frac{1}{3}}}$
$\log(y) = \log\left(\dfrac{400}{x^{1\frac{1}{3}}}\right)$
$\log(y) = \log(400) - \log\left(x^{1\frac{1}{3}}\right)$
$\log(y) = \log(400) - 1\frac{1}{3}\log(x)$
$\log(y) \approx 2,60 - 1,33\log(x)$
Dus $\log(y) = 2,60 - 1,33\log(x)$.

61 **a** In opgave 57a is de formule $N = 200 \cdot 1,08^t$ herleid tot $\log(N) = \log(200) + t \cdot \log(1,08)$. Dus deze formules komen op hetzelfde neer.

b In opgave 57b is de formule $F = 20L^3$ herleid tot $\log(F) = \log(20) + 3\log(L)$. Dus deze formules komen op hetzelfde neer.

9

Bladzijde 40

62 **a** $\log(N) = 0,097t + 2,45$
$N = 10^{0,097t + 2,45}$
$N = 10^{0,097t} \cdot 10^{2,45}$
$N = (10^{0,097})^t \cdot 10^{2,45}$
$N \approx 1,25^t \cdot 282$
Dus $N = 282 \cdot 1,25^t$.

b $\log(N) = -0,022t + 3,75$
$N = 10^{-0,022t + 3,75}$
$N = 10^{-0,022t} \cdot 10^{3,75}$
$N = (10^{-0,022})^t \cdot 10^{3,75}$
$N \approx 0,95^t \cdot 5623$
Dus $N = 5623 \cdot 0,95^t$.

c $t = 5\log(N) - 11$
$5\log(N) = t + 11$
$\log(N) = 0,2t + 2,2$
$N = 10^{0,2t + 2,2}$
$N = 10^{0,2t} \cdot 10^{2,2}$
$N = (10^{0,2})^t \cdot 10^{2,2}$
$N \approx 1,58^t \cdot 158$
Dus $N = 158 \cdot 1,58^t$.

d $t = 30 - 8\log(N)$
$8\log(N) = -t + 30$
$\log(N) = -0,125t + 3,75$
$N = 10^{-0,125t + 3,75}$
$N = 10^{-0,125t} \cdot 10^{3,75}$
$N = (10^{-0,125})^t \cdot 10^{3,75}$
$N \approx 0,75^t \cdot 5623$
Dus $N = 5623 \cdot 0,75^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

63 **a** $\log(y) = 1{,}70 + 1{,}45\log(x)$
$\log(y) = \log(10^{1{,}70}) + \log(x^{1{,}45})$
$\log(y) = \log(10^{1{,}70} \cdot x^{1{,}45})$
$y = 10^{1{,}70} \cdot x^{1{,}45}$
$y \approx 50 \cdot x^{1{,}45}$
Dus $y = 50x^{1{,}45}$.

b $\log(y) = 3{,}50 - 1{,}12\log(x)$
$\log(y) = \log(10^{3{,}50}) + \log(x^{-1{,}12})$
$\log(y) = \log(10^{3{,}50} \cdot x^{-1{,}12})$
$y = 10^{3{,}50} \cdot x^{-1{,}12}$
$y \approx 3162 \cdot x^{-1{,}12}$
Dus $y = 3162 \cdot x^{-1{,}12}$.

c $\log(x) = 0{,}5\log(y) - 2{,}75$
$0{,}5\log(y) = \log(x) + 2{,}75$
$\log(y) = 2\log(x) + 5{,}5$
$\log(y) = \log(x^2) + \log(10^{5{,}5})$
$\log(y) = \log(x^2 \cdot 10^{5{,}5})$
$y = x^2 \cdot 10^{5{,}5}$
$y \approx x^2 \cdot 316228$
Dus $y = 316228x^2$.

d $3\log(x) - 4\log(y) + 5 = 0$
$4\log(y) = 3\log(x) + 5$
$\log(y) = 0{,}75\log(x) + 1{,}25$
$\log(y) = \log(x^{0{,}75}) + \log(10^{1{,}25})$
$\log(y) = \log(x^{0{,}75} \cdot 10^{1{,}25})$
$y = x^{0{,}75} \cdot 10^{1{,}25}$
$y \approx x^{0{,}75} \cdot 18$
Dus $y = 18x^{0{,}75}$.

64 **a** $\log(y) = 0{,}19x + 2{,}74$
$y = 10^{0{,}19x + 2{,}74}$
$y = 10^{0{,}19x} \cdot 10^{2{,}74}$
$y = (10^{0{,}19})^x \cdot 10^{2{,}74}$
$y \approx 1{,}55^x \cdot 550$
Dus $y = 550 \cdot 1{,}55^x$.

b $\log(y) = 0{,}65\log(x) + 2{,}84$
$\log(y) = \log(x^{0{,}65}) + \log(10^{2{,}84})$
$\log(y) = \log(x^{0{,}65} \cdot 10^{2{,}84})$
$y = x^{0{,}65} \cdot 10^{2{,}84}$
$y \approx x^{0{,}65} \cdot 692$
Dus $y = 692x^{0{,}65}$.

c $x = 2{,}5\log(y) - 12$
$2{,}5\log(y) = x + 12$
$\log(y) = 0{,}4x + 4{,}8$
$y = 10^{0{,}4x + 4{,}8}$
$y = 10^{0{,}4x} \cdot 10^{4{,}8}$
$y = (10^{0{,}4})^x \cdot 10^{4{,}8}$
$y \approx 2{,}51^x \cdot 63096$
Dus $y = 63096 \cdot 2{,}51^x$.

d $2{,}2\log(x) + 5\log(y) = 12$
$5\log(y) = -2{,}2\log(x) + 12$
$\log(y) = -0{,}44\log(x) + 2{,}4$
$\log(y) = \log(x^{-0{,}44}) + \log(10^{2{,}4})$
$\log(y) = \log(x^{-0{,}44} \cdot 10^{2{,}4})$
$y = x^{-0{,}44} \cdot 10^{2{,}4}$
$y \approx x^{-0{,}44} \cdot 251$
Dus $y = 251x^{-0{,}44}$.

65 **a** $N = 25000 \cdot 0{,}82^{2t+3}$
$\log(N) = \log(25000 \cdot 0{,}82^{2t+3})$
$\log(N) = \log(25000) + \log(0{,}82^{2t+3})$
$\log(N) = \log(25000) + (2t+3)\log(0{,}82)$
$\log(N) = \log(25000) + 2t \cdot \log(0{,}82) + 3\log(0{,}82)$
$\log(N) \approx 4{,}14 + t \cdot -0{,}1724$
Dus $\log(N) = -0{,}1724t + 4{,}14$.

b $\log(N) = 0{,}193t + 2{,}75$
$N = 10^{0{,}193t + 2{,}75}$
$N = 10^{0{,}193t} \cdot 10^{2{,}75}$
$N = (10^{0{,}193})^t \cdot 10^{2{,}75}$
$N \approx 1{,}56^t \cdot 562$
Dus $N = 562 \cdot 1{,}56^t$.

c $6\log(D) - \log(R) = 15$
$6\log(D) = \log(R) + 15$
$\log(D) = \frac{1}{6}\log(R) + 2{,}5$
$\log(D) = \log\left(R^{\frac{1}{6}}\right) + \log(10^{2{,}5})$
$\log(D) = \log\left(R^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{2{,}5}\right)$
$D = R^{\frac{1}{6}} \cdot 10^{2{,}5}$
$D \approx R^{0{,}17} \cdot 316$
Dus $D = 316\,R^{0{,}17}$.

d $L = 6\log(K) - 27$
$6\log(K) = L + 27$
$\log(K) = \frac{1}{6}L + 4{,}5$
$K = 10^{\frac{1}{6}L + 4{,}5}$
$K = 10^{\frac{1}{6}L} \cdot 10^{4{,}5}$
$K = \left(10^{\frac{1}{6}}\right)^L \cdot 10^{4{,}5}$
$K \approx 1{,}47^L \cdot 31623$
Dus $K = 31600 \cdot 1{,}47^L$.

e $N = \dfrac{1280}{t^2 \cdot \sqrt{t}} = \dfrac{1280}{t^2 \cdot t^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1280}{t^{2\frac{1}{2}}}$
$\log(N) = \log\left(\dfrac{1280}{t^{2\frac{1}{2}}}\right)$
$\log(N) = \log(1280) - \log\left(t^{2\frac{1}{2}}\right)$
$\log(N) = \log(1280) - 2\frac{1}{2}\log(t)$
$\log(N) \approx 3{,}1 - 2{,}5\log(t)$
Dus $\log(N) = 3{,}1 - 2{,}5\log(t)$.

f $\log(P) = 0{,}05h + 2{,}14$
$P = 10^{0{,}05h + 2{,}14}$
$P = 10^{0{,}05h} \cdot 10^{2{,}14}$
$P = (10^{0{,}05})^h \cdot 10^{2{,}14}$
$P \approx 1{,}12^h \cdot 138$
Dus $P = 138 \cdot 1{,}12^h$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 41

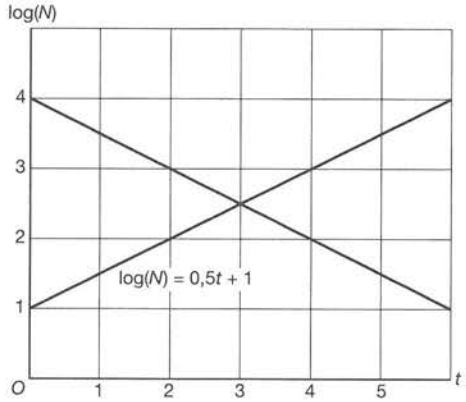
66 **a** $\log(N) = 3$ geeft $N = 10^3 = 1000$
Dus bij $t = 2$ hoort $N = 1000$.

b Je leest af: bij $t = 4$ hoort $\log(N) = 2$.
$\log(N) = 2$ geeft $N = 10^2 = 100$
Dus bij $t = 4$ hoort $N = 100$.

c Je leest af: bij $t = 3$ hoort $\log(N) = 2{,}5$.
$\log(N) = 2$, geeft $N = 10^{2,5} \approx 316$
Dus bij $t = 3$ hoort $N \approx 316$.

d

t	0	2
$\log(N)$	1	2



Bladzijde 43

67 **a** $P = 4$ geeft $\log(Q) \approx 2{,}5$, dus $Q \approx 10^{2,5} \approx 316$.

b $Q = 3000$ geeft $\log(Q) = \log(3000) \approx 3{,}5$
$\log(Q) = 3{,}5$ geeft $P \approx 8$

c De lijn gaat door de punten (2, 2) en (10, 4).

Stel $\log(Q) = m \cdot P + n$ met $m = \dfrac{4-2}{10-2} = \frac{1}{4}$.

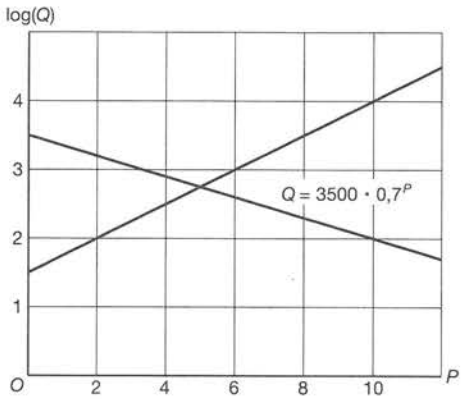
$\left.\begin{array}{l}\log(Q) = \frac{1}{4}P + n \\ \text{door } (10, 4)\end{array}\right\}$ $\frac{1}{4} \cdot 10 + n = 4$
$2\frac{1}{2} + n = 4$
$n = 1\frac{1}{2}$

Dus $m = \frac{1}{4}$ en $n = 1\frac{1}{2}$.

d $\log(Q) = \frac{1}{4}P + 1\frac{1}{2}$

$Q = 10^{\frac{1}{4}P + 1\frac{1}{2}}$
$Q = 10^{\frac{1}{4}P} \cdot 10^{1\frac{1}{2}}$
$Q = \left(10^{\frac{1}{4}}\right)^P \cdot 10^{1\frac{1}{2}}$
$Q \approx 1{,}78^P \cdot 32$
Dus $Q = 32 \cdot 1{,}78^P$.

e $Q = 3500 \cdot 0{,}7^P$
$P = 0$ geeft $Q = 3500$, dus $\log(Q) = \log(3500) \approx 3{,}5$.
$P = 12$ geeft $Q = 3500 \cdot 0{,}7^{12} \approx 48{,}4$, dus $\log(Q) = \log(48{,}4) \approx 1{,}7$.
Teken de lijn door de punten (0; 3,5) en (12; 1,7).



© Noordhoff Uitgevers bv

68 **a** Lees af: $M = 2$ geeft $\log(E) \approx 4{,}4$, dus $E \approx 10^{4{,}4} \approx 25\,000$ kJ.
b Lees af: $M = 5{,}8$ geeft $\log(E) \approx 10{,}1$, dus $E \approx 10^{10{,}1} \approx 1{,}26 \cdot 10^{10}$ kJ.
c $E = 9{,}3 \cdot 10^{15}$ geeft $\log(E) = \log(9{,}3 \cdot 10^{15}) \approx 16{,}0$.
Lees af: $\log(E) = 16{,}0$ geeft $M \approx 9{,}8$.
d $E = 330\,000$ geeft $\log(E) = \log(330\,000) \approx 5{,}5$.
Lees af: $\log(E) = 5{,}5$ geeft $M \approx 2{,}8$.
Dit komt overeen met 2,8 op de schaal van Richter.
e Neem bijvoorbeeld $E = 10^{10}$ en $E = 10^6 \cdot 10^{10} = 10^{16}$.
$E = 10^{10}$ geeft $\log(E) = \log(10^{10}) = 10$, aflezen geeft $M \approx 5{,}8$.
$E = 10^{16}$ geeft $\log(E) = \log(10^{16}) = 16$, aflezen geeft $M \approx 9{,}8$.
Dus het klopt voor $E = 10^{10}$ en $E = 10^{16}$.
Zie de grafiek. Als $\log(E)$ met 6 toeneemt, neemt M met 4 toe.
Dus de bewering is algemeen ook waar.
f Uit het voorgaande volgt: als M met 2 toeneemt, dan neemt $\log(E)$ met 3 toe.
Dus de hoeveelheid energie die bij de tweede beving vrijkwam was $10^3 = 1000$ keer zoveel als bij de eerste beving.
g $M = 0{,}67\log(E) - 0{,}9$
$0{,}67\log(E) = M + 0{,}9$
$\log(E) = \frac{1}{0{,}67}M + \frac{0{,}9}{0{,}67}$
$\log(E) = 1{,}49...M + 1{,}34...$
$E = 10^{1{,}49...M + 1{,}34...}$
$E = 10^{1{,}49...M} \cdot 10^{1{,}34...}$
$E = (10^{1{,}49...})^M \cdot 10^{1{,}34...}$
$E \approx 31^M \cdot 22$
Dus $E = 22 \cdot 31^M$.

Bladzijde 44

69 **a** De grafiek gaat door het punt (0, 0), dus bij $\log(t) = 0$ hoort $\log(G) = 0$.
$\log(t) = 0$ geeft $t = 1$ en $\log(G) = 0$ geeft $G = 1$.
Dus na 1 dag is 1 ha bos verloren gegaan.
b P is het punt (1,9; 5,3), dus $\log(t) = 1{,}9$ en $\log(G) = 5{,}3$.
$\log(t) = 1{,}9$ geeft $t = 10^{1{,}9} \approx 79{,}4$
$\log(G) = 5{,}3$ geeft $G = 10^{5{,}3} \approx 199\,500$
Dus P hoort bij het einde van de bosbrand die 80 dagen duurde en waarbij 200 000 ha bos verloren is gegaan.
c $t = 10$ geeft $\log(t) = \log(10) = 1$
Aflezen geeft het punt (1; 2,8).
$t = 50$ geeft $\log(t) = \log(50) \approx 1{,}7$
Aflezen geeft het punt (1,7; 4,8).
$\log(G) = 2{,}8$ geeft $G = 10^{2{,}8} \approx 600$
$\log(G) = 4{,}8$ geeft $G = 10^{4{,}8} \approx 63\,100$
Dus tussen $t = 10$ en $t = 50$ is $63\,100 - 600 = 62\,500$ ha bos in vlammen opgegaan.
d $G = 100$ geeft $\log(G) = \log(100) = 2$
Aflezen geeft het punt (0,7; 2).
$G = 100\,000$ geeft $\log(G) = \log(100\,000) = 5$
Aflezen geeft het punt (1,8; 5).
$\log(t) = 0{,}7$ geeft $t = 10^{0{,}7} \approx 5$
$\log(t) = 1{,}8$ geeft $t = 10^{1{,}8} \approx 63$
Dus in $63 - 5 = 58$ dagen.
e Het is een rechte lijn door de oorsprong.
Dus de formule is van de vorm $\log(G) = a \cdot \log(t)$.
De lijn gaat door het punt $(\log(t), \log(G)) = (1{,}8; 5)$.
Invullen in $\log(G) = a \cdot \log(t)$ geeft $a \cdot 1{,}8 = 5$

$$a = \frac{5}{1{,}8} \approx 2{,}8$$

Dus $\log(G) = 2{,}8\log(t)$.
f $\log(G) = 2{,}8\log(t)$
$\log(G) = \log(t^{2{,}8})$
$G = t^{2{,}8}$
Dus $G = t^{2{,}8}$.

9

g Controle van vraag c:
$t = 10$ geeft $G = 10^{2,8} \approx 630$ ha
$t = 50$ geeft $G = 50^{2,8} \approx 57\,160$ ha
Het verschil is $57\,160 - 630 \approx 57\,000$ ha.
Dat wijkt iets af van het antwoord van c.
Zo zie je maar dat het moeilijk is om goed af te lezen in grafieken waarin bij de assen log is gebruikt.

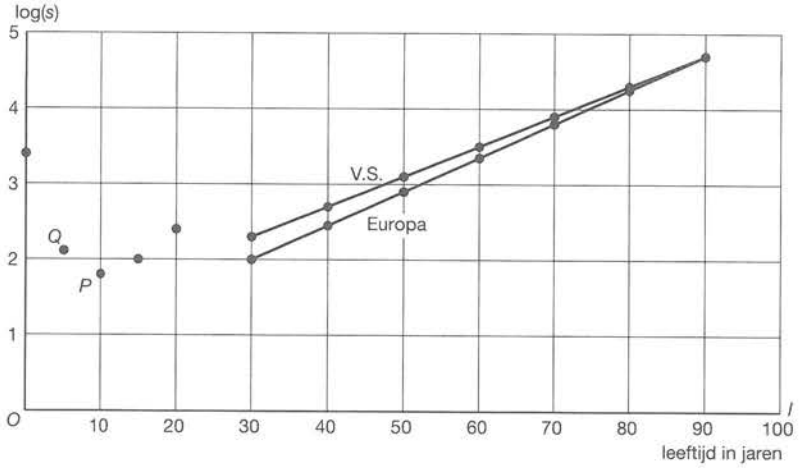
Bladzijde 45

70 **a** Bij $l = 10$ hoort $P(10; 1,8)$, dus $\log(s) = 1,8$.
$\log(s) = 1,8$ geeft $s = 10^{1,8} \approx 63$

b Bij $l = 20$ hoort $P(20; 2,4)$, dus $\log(s) = 2,4$.
$\log(s) = 2,4$ geeft $s = 10^{2,4} \approx 251$

c Bij $l = 0$ hoort $P(0; 3,4)$, dus $\log(s) = 3,4$.
$\log(s) = 3,4$ geeft $s = 10^{3,4} \approx 2510$
Dus $\frac{2510}{100\,000} \times 100\% \approx 2,5\%$ van de pasgeboren baby's sterft binnen een jaar.

d $s = 126$ geeft $\log(s) \approx 2,1$
Teken het punt $Q(5; 2,1)$.



e Stel $\log(s) = al + b$ met $a = \frac{4,7 - 2,3}{90 - 30} = 0,04$.

$\left.\begin{array}{l}\log(s) = 0,04l + b \\ \text{door } (30; 2,3)\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}0,04 \cdot 30 + b = 2,3 \\ 1,2 + b = 2,3 \\ b = 1,1\end{array}$

Dus $a = 0,04$ en $b = 1,1$.

f $s = 12\,600$ geeft $\log(s) = \log(12\,600) \approx 4,1$
$\log(s) = 4,1$ geeft $0,04l + 1,1 = 4,1$
$0,04l = 3$
$l = 75$
Dus 75 jaar.

g $\log(s) = 0,04l + 1,1$
$s = 10^{0,04l + 1,1}$
$s = 10^{0,04l} \cdot 10^{1,1}$
$s = (10^{0,04})^l \cdot 10^{1,1}$
$s \approx 1,096^l \cdot 12,6$
Dus $s = 12,6 \cdot 1,096^l$.

h Zie de figuur bij vraag d.

i Voer in $y_1 = 12,6 \cdot 1,096^x$ en $y_2 = 4,8 \cdot 1,109^x$.
Intersect geeft $x = 81,8...$
Dus bij een leeftijd van 82 jaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 46

71 De lijn gaat door de punten (1980; 4,5) en (2000; 7,5).
Dus in 20 jaar is $\log(N)$ met 3 toegenomen. Dat wil zeggen dat N 1000 keer zo groot is geworden.
$g_{20\text{ jaar}} = 1000$ geeft $g_{2\text{ jaar}} = 1000^{\frac{2}{20}} = 1{,}995...$
Dus inderdaad een verdubbeling in 2 jaar.

72 **a** Aflezen geeft dat bij punt A hoort $\log(M) \approx -1{,}3$ en $\log(P) \approx 3$.
$\log(M) \approx -1{,}3$ geeft $M \approx 0{,}05$, dus de lichaamsmassa is 0,05 kg.
$\log(P) \approx 3$ geeft $P \approx 1000$, dus de populatiedichtheid is 1000 dieren per km^2.
Aflezen geeft dat bij punt B hoort $\log(M) \approx 2{,}7$ en $\log(P) \approx 0$.
$\log(M) \approx 2{,}7$ geeft $M \approx 500$, dus de lichaamsmassa is 500 kg.
$\log(P) \approx 0$ geeft $P \approx 1$, dus de populatiedichtheid is 1 dier per km^2.
Aflezen geeft dat bij punt C hoort $\log(M) \approx 0{,}6$ en $\log(P) \approx 1{,}8$.
$\log(M) \approx 0{,}6$ geeft $M \approx 4$, dus de lichaamsmassa is 4 kg.
$\log(P) \approx 1{,}8$ geeft $P \approx 63$, dus de populatiedichtheid is 63 dieren per km^2.
Aflezen geeft dat bij punt D hoort $\log(M) \approx 1{,}2$ en $\log(P) \approx 0{,}2$.
$\log(M) \approx 1{,}2$ geeft $M \approx 16$, dus de lichaamsmassa is 16 kg.
$\log(P) \approx 0{,}2$ geeft $P \approx 1{,}6$, dus de populatiedichtheid is 1,6 dieren per km^2.

b $M \approx 1$ geeft $\log(M) \approx 0$
Aflezen geeft $\log(P) \approx 2$.
$\log(P) \approx 2$ geeft $P \approx 100$, dus de populatiedichtheid is 100 dieren per km^2.

c De populatiedichtheid is $\frac{125}{25} = 5$ per km^2.
$P = 5$ geeft $\log(P) \approx 0{,}7$
Aflezen geeft $\log(M) \approx 1{,}7$.
$\log(M) \approx 1{,}7$ geeft $M \approx 50$
Dus de lichaamsmassa is 50 kg.

d De lijn gaat door de punten $A(-1{,}3;\ 3)$ en $B(2{,}7;\ 0)$, dus de richtingscoëfficiënt is gelijk aan
$\frac{0-3}{2{,}7--1{,}3} = \frac{-3}{4} = -0{,}75$.
De lijn gaat door (0, 2).
Dus de vergelijking is $\log(P) = -0{,}75\log(M) + 2$.

e $\log(P) = -0{,}75\log(M) + 2$
$\log(P) = \log(M^{-0{,}75}) + \log(100)$
$\log(P) = \log(M^{-0{,}75} \cdot 100)$
$P = M^{-0{,}75} \cdot 100$
Dus $P = 100M^{-0{,}75}$.

Diagnostische toets

Bladzijde 48

1 **a** $\frac{51}{38} \approx 1{,}342$, $\frac{68}{51} \approx 1{,}333$, $\frac{90}{68} \approx 1{,}324$ en $\frac{120}{90} \approx 1{,}333$
De uitkomsten verschillen weinig, dus bij benadering exponentiële groei.
$N = b \cdot g^t$ met $b = 38$ en $g = 1{,}33$, dus $N = 38 \cdot 1{,}33^t$.

b Bij 1 januari 2025 hoort $t = \frac{25}{4} = 6{,}25$.
$t = 6{,}25$ geeft $N = 38 \cdot 1{,}33^{6{,}25} \approx 226$ werknemers op 1 januari 2025.

2 **a** $\left.\begin{array}{l}\text{Stel } H = b \cdot g^t \text{ met } b = 30 \\ 8{,}3\% \text{ eraf, dus } g = 0{,}917\end{array}\right\} H = 30 \cdot 0{,}917^t$

b $t = 5$ geeft $H = 30 \cdot 0{,}917^5 = 19{,}45...$
Dus na 5 dagen is er 19,5 mg radioactief jodium.

c Voer in $y_1 = 30 \cdot 0{,}917^x$ en $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x = 31{,}25...$
Dus na 32 dagen is er voor het eerst minder dan 2 mg.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 **a** $g_{\text{dag}} = 1{,}10$ geeft $g_{\text{week}} = 1{,}10^7 \approx 1{,}949$
Het groeipercentage per week is 94,9%.
b $g_{\text{dag}} = 1{,}10$ geeft $g_{8\text{ uur}} = 1{,}10^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}032$
Het groeipercentage per 8 uur is 3,2%.

4 **a** $g_{\text{jaar}} = 0{,}64$
$g_{\text{maand}} = 0{,}64^{\frac{1}{12}} = 0{,}9634...$,
De verandering per maand is -3,7%
Dus de afname per maand is 3,7%.
b $g_{\text{jaar}} = 0{,}64$ geeft $g_{5\text{ jaar}} = 0{,}64^5 = 0{,}1073...$
De verandering per 5 jaar is 0,8926...%
Dus de afname per 5 jaar is 89,3%.

5 **a** De groeifactor per 10 dagen is $\frac{1500}{2500} = 0{,}6$.
De groeifactor per dag is $0{,}6^{\frac{1}{10}} \approx 0{,}950$.
$H = b \cdot g^t$ met $g = 0{,}950$ en t in dagen, dus $H = b \cdot 0{,}950^t$.
$\left.\begin{array}{l} H = b \cdot 0{,}950^t \\ \text{bij } t = 3 \text{ hoort } H = 2500 \end{array}\right\} b \cdot 0{,}950^3 = 2500$
$b = \frac{2500}{0{,}950^3} \approx 2914$
Dus $H = 2914 \cdot 0{,}950^t$.
De ballon werd gevuld met 2914 cm³ helium.
b Voer in $y_1 = 2914 \cdot 0{,}950^x$ en $y_2 = 500$.
Intersect geeft $x = 34{,}3...$
Dus na 34 dagen.

6 **a** ${}^3\log(5) + 2 \cdot {}^3\log(2) - {}^3\log(7) = {}^3\log(5) + {}^3\log(2^2) - {}^3\log(7) = {}^3\log\left(\frac{5 \cdot 4}{7}\right) = {}^3\log\left(2\frac{6}{7}\right)$
b $3 + {}^2\log(5) = {}^2\log(8) + {}^2\log(5) = {}^2\log(8 \cdot 5) = {}^2\log(40)$
c ${}^2\log(8) + {}^3\log(0{,}2) = 3 + {}^3\log(0{,}2) = {}^3\log(3^3) + {}^3\log(0{,}2) = {}^3\log(27 \cdot 0{,}2) = {}^3\log(5{,}4)$
d ${}^2\log(3) - \frac{1}{2}{}^2\log(16) = {}^2\log(3) - -4 = {}^2\log(3) + {}^2\log(2^4) = {}^2\log(3 \cdot 16) = {}^2\log(48)$

Bladzijde 49

9

7 **a** ${}^3\log(162) - 2 = {}^3\log(81 \cdot 2) - 2 = {}^3\log(81) + {}^3\log(2) - 2 = 4 + {}^3\log(2) - 2 = 2 + {}^3\log(2)$
b $3 \cdot \log(200) = 3 \cdot \log(2 \cdot 100) = 3(\log(2) + \log(100)) = 3(\log(2) + 2) = 3\log(2) + 6 = 6 + \log(8)$

8 **a** $2 \cdot {}^2\log(x - 1) = 1 + {}^2\log(18)$
${}^2\log(x - 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot {}^2\log(18)$
${}^2\log(x - 1) = {}^2\log\left(2^{\frac{1}{2}}\right) + {}^2\log\left(18^{\frac{1}{2}}\right)$
${}^2\log(x - 1) = {}^2\log\left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}\right)$
${}^2\log(x - 1) = {}^2\log\left(\sqrt{36}\right)$
$x - 1 = 6$
$x = 7$
vold.
b ${}^2\log(x) = 3 - {}^2\log(x + 2)$
${}^2\log(x) + {}^2\log(x + 2) = 3$
${}^2\log(x(x + 2)) = 3$
$x(x + 2) = 8$
$x^2 + 2x - 8 = 0$
$(x - 2)(x + 4) = 0$
$x = 2 \vee x = -4$
vold. vold. niet
c ${}^3\log(2x) + 4 = {}^3\log(2x + 1)$
${}^3\log(2x) + {}^3\log(3^4) = {}^3\log(2x + 1)$
${}^3\log(2x \cdot 81) = {}^3\log(2x + 1)$
$162x = 2x + 1$
$160x = 1$
$x = \frac{1}{160}$
vold.
d $\frac{1}{2}\log(2x) + \frac{1}{2}\log(x + 1) = -2$
$\frac{1}{2}\log(2x(x + 1)) = -2$
$2x(x + 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
$2x^2 + 2x = 4$
$2x^2 + 2x - 4 = 0$
$x^2 + x - 2 = 0$
$(x - 1)(x + 2) = 0$
$x = 1 \vee x = -2$
vold. vold. niet

© Noordhoff Uitgevers bv

9 **a** $f(x) = g(x)$ geeft $3 - {}^2\log(2x + 5) = {}^2\log(x - 5)$

$3 = {}^2\log(2x + 5) + {}^2\log(x - 5)$

${}^2\log((2x + 5)(x - 5)) = 3$

$(2x + 5)(x - 5) = 8$

$2x^2 - 5x - 25 = 8$

$2x^2 - 5x - 33 = 0$

$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -33 = 289$

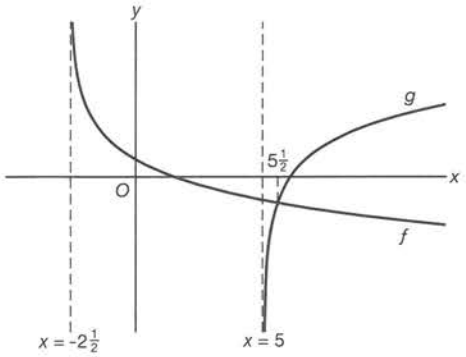
$x = \dfrac{5 - 17}{4} \vee x = \dfrac{5 + 17}{4}$

$x = -3 \ \vee \ x = 5\frac{1}{2}$

vold. niet vold.

$f(5\frac{1}{2}) = -1$, dus het snijpunt is $(5\frac{1}{2}, -1)$.

b



$f(x) \geq g(x)$ geeft $5 < x \leq 5\frac{1}{2}$

10 **a** $1{,}002^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}002}\log(2) = 346{,}92...$

De verdubbelingstijd is 346,92... maanden $\approx$ 29 jaar.

b $0{,}8^T = \frac{1}{2}$ geeft $T = {}^{0{,}8}\log(\frac{1}{2}) = 3{,}10...$

De halveringstijd is 3,10... weken $\approx$ 22 dagen.

11 **a** $N = 1000 \cdot 0{,}88^{3t-1}$

$\log(N) = \log(1000 \cdot 0{,}88^{3t-1})$

$\log(N) = \log(1000) + \log(0{,}88^{3t-1})$

$\log(N) = 3 + (3t - 1) \cdot \log(0{,}88)$

$\log(N) = 3 + 3t\log(0{,}88) - \log(0{,}88)$

$\log(N) = 3t \cdot -0{,}055... + 3 + 0{,}055...$

$\log(N) = -0{,}166... \cdot t + 3{,}055...$

Dus $\log(N) = -0{,}17t + 3{,}06$.

b $y = 200 \cdot x^{-3{,}5}$

$\log(y) = \log(200 \cdot x^{-3{,}5})$

$\log(y) = \log(200) + \log(x^{-3{,}5})$

$\log(y) = 2{,}301... - 3{,}5\log(x)$

Dus $\log(y) = 2{,}30 - 3{,}5\log(x)$.

12 **a** $\log(N) = 0{,}6t + 2{,}4$

$N = 10^{0{,}6t + 2{,}4}$

$N = 10^{0{,}6t} \cdot 10^{2{,}4}$

$N = 10^{2{,}4} \cdot (10^{0{,}6})^t$

$N = 251{,}1... \cdot 3{,}9810...^t$

Dus $N = 251 \cdot 3{,}981^t$.

b $2t + 2{,}5\log(N) = 4$

$2{,}5\log(N) = -2t + 4$

$\log(N) = -0{,}8t + 1{,}6$

$N = 10^{-0{,}8t + 1{,}6}$

$N = 10^{-0{,}8t} \cdot 10^{1{,}6}$

$N = 10^{1{,}6} \cdot (10^{-0{,}8})^t$

$N = 39{,}8... \cdot 0{,}1584...^t$

Dus $N = 40 \cdot 0{,}158^t$.

© Noordhoff Uitgevers bv

13 **a** $\log(y) = 3{,}20 + 0{,}62\log(x)$
$\log(y) = \log(10^{3,2}) + \log(x^{0,62})$
$\log(y) = \log(10^{3,2} \cdot x^{0,62})$
$y = 10^{3,2} \cdot x^{0,62}$
$y = 1584{,}8... \cdot x^{0,62}$
Dus $y = 1585x^{0,62}$.

b $1{,}6\log(x) + 5\log(y) - 8 = 0$
$5\log(y) = 8 - 1{,}6\log(x)$
$\log(y) = 1{,}6 - 0{,}32\log(x)$
$\log(y) = \log(10^{1,6}) + \log(x^{-0,32})$
$\log(y) = \log(10^{1,6} \cdot x^{-0,32})$
$y = 10^{1,6} \cdot x^{-0,32}$
$y = 39{,}8... \cdot x^{-0,32}$
Dus $y = 40x^{-0,32}$.

14 **a** Bij $W = 5$ hoort $\log(F) = 2{,}75$, dus $F = 10^{2,75} \approx 562$.
Dus $F \approx 600$.

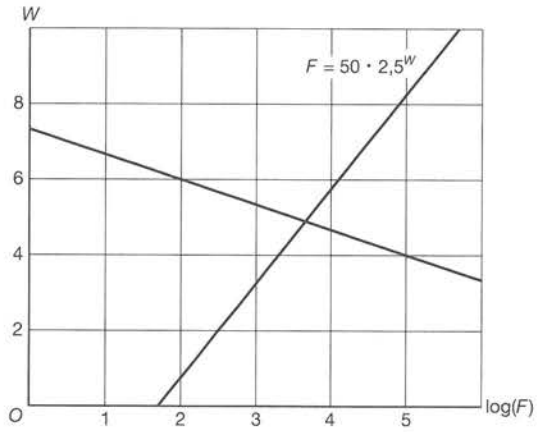
b $F = 7000$ geeft $\log(F) = \log(7000) = 3{,}84...$
Lees af: bij $\log(F) = 3{,}8$ hoort $W \approx 3{,}5$.

c $W = p\log(F) + q$
De lijn gaat door de punten (2, 6) en (5, 2), dus $p = \dfrac{\Delta W}{\Delta\log(F)} = \dfrac{2-6}{5-2} = \dfrac{-4}{3} = -1\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} W = -1\frac{1}{3}\log(F) + q \\ \text{door } (\log(F), W) = (2, 6) \end{array}\right\} -1\tfrac{1}{3} \cdot 2 + q = 6$$
$-2\frac{2}{3} + q = 6$
$q = 8\frac{2}{3}$

d $W = -1\frac{1}{3}\log(F) + 8\frac{2}{3}$
$1\frac{1}{3}\log(F) = 8\frac{2}{3} - W$
$\log(F) = 6\frac{1}{2} - \frac{3}{4}W$
$F = 10^{6\frac{1}{2} - \frac{3}{4}W}$
$F = 10^{6\frac{1}{2}} \cdot 10^{-\frac{3}{4}W}$
$F = 3\,162\,227{,}6... \cdot \left(10^{-\frac{3}{4}}\right)^W$
$F = 3\,162\,227{,}6... \cdot 0{,}1778...^W$
Dus $F = 3\,162\,000 \cdot 0{,}178^W$.

e $W = 0$ geeft $F = 50$, dus de grafiek gaat door het punt $(\log(50), 0) \approx (1{,}7; 0)$.
$W = 8$ geeft $F = 50 \cdot 2{,}5^8 \approx 76\,294$, dus de grafiek gaat door het punt $(\log(76\,294), 8) \approx (4{,}9; 8)$.



© Noordhoff Uitgevers bv

10 Meetkundige berekeningen

Voorkennis Hoeken en afstanden

Bladzijde 53

1 **a** De hoeken in de figuur blijven hetzelfde, wat voor lengte voor AB je ook maar kiest.
$AB = 10$ geeft $AC = 1{,}2 \times 10 = 12$
$\cos(\angle A) = \frac{AB}{AC} = \frac{10}{12}$ geeft $\angle A \approx 33{,}6°$

b Neem bijvoorbeeld $QR = 100$.

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\angle P) = \sin(35°) = \frac{QR}{PQ} = \frac{100}{PQ} \\ \sin(35°) = 0{,}573...\end{array}\right\} \frac{100}{PQ} = 0{,}573..., \text{ dus } PQ = \frac{100}{57{,}3...} \approx 174{,}3$$

Dus PQ is 74,3% langer dan QR.

2 **a** $AB = 1\frac{1}{2}BC$ geeft $\tan(\angle BAC) = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{1\frac{1}{2}BC} = \frac{1}{1\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$
$\tan(\angle BAC) = \frac{2}{3}$ geeft $\angle BAC \approx 33{,}7°$

b $$\left.\begin{array}{l}\cos(\angle BAC) = \cos(32{,}5°) = 0{,}8433... \\ \cos(\angle BAC) = \frac{AB}{AC}\end{array}\right\} \frac{AB}{AC} = 0{,}8433...$$
$$AC = \frac{AB}{0{,}8433...}$$
$$AC = 1{,}1856... \cdot AB$$

Dus AC is 18,6% langer dan AB.

3 In $\triangle ABC$ geldt $\cos(20°) = \frac{AB}{AC}$ ofwel $AC = \frac{AB}{\cos(20°)} = 1{,}0641... \cdot AB$.
In $\triangle ACD$ geldt $\cos(20°) = \frac{AC}{AD}$ ofwel $AD = \frac{AC}{\cos(20°)} = 1{,}0641... \cdot AC$.
In $\triangle ADE$ geldt $\cos(20°) = \frac{AD}{AE}$ ofwel $AE = \frac{AD}{\cos(20°)} = 1{,}0641... \cdot AD$.

$AE = 1{,}0641... \cdot AD = 1{,}0641...^2 \cdot AC = 1{,}0641...^3 \cdot AB = 1{,}2051... \cdot AB$
Dus AE is 20,5% langer dan AB.

Bladzijde 55

4 $\angle B = 180° - 55° - 75° = 50°$

De sinusregel geeft $\frac{AC}{\sin(\angle B)} = \frac{BC}{\sin(\angle A)}$
$$\frac{10}{\sin(50°)} = \frac{BC}{\sin(55°)}$$
$$BC = \frac{10\sin(55°)}{\sin(50°)}$$
$$BC \approx 10{,}7$$

De sinusregel geeft $\frac{AB}{\sin(\angle C)} = \frac{AC}{\sin(\angle B)}$
$$\frac{AB}{\sin(75°)} = \frac{10}{\sin(50°)}$$
$$AB = \frac{10\sin(75°)}{\sin(50°)}$$
$$AB \approx 12{,}6$$

10

© Noordhoff Uitgevers bv

5 De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot AD \cdot BD \cdot \cos(\angle ADB)$

$$10^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\angle ADB)$$
$$108\cos(\angle ADB) = 36 + 81 - 100$$
$$\cos(\angle ADB) = \tfrac{17}{108}$$
$$\angle ADB = 80{,}94...^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = 80{,}94...^\circ \\ \angle ADC = 150^\circ\end{array}\right\} \angle BDC = 150^\circ - 80{,}94...^\circ = 69{,}05...^\circ$$

De cosinusregel in $\triangle BDC$ geeft $BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2 \cdot BD \cdot CD \cdot \cos(\angle BDC)$

$$BC^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \cdot 9 \cdot 4 \cdot \cos(69{,}05...^\circ)$$
$$BC^2 = 71{,}26...$$
$$BC \approx 8{,}4$$

Bladzijde 56

6 **a** De stelling van Pythagoras in $\triangle ABE$ geeft $BE^2 + AE^2 = AB^2$

$$BE^2 + \left(4\tfrac{4}{5}\right)^2 = 6^2$$
$$BE^2 + 23\tfrac{1}{25} = 36$$
$$BE^2 = 12\tfrac{24}{25}$$
$$BE = 3\tfrac{3}{5}$$

b $\left.\begin{array}{l}\angle MFE = \angle BAE \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle MEF = \angle BEA\ (= 90^\circ)\end{array}\right\} \triangle FME \backsim \triangle ABE$

c $ME = BM - BE = 5 - 3\tfrac{3}{5} = 1\tfrac{2}{5}$

Uit $\triangle FME \backsim \triangle ABE$ volgt

$$\frac{FM}{AB} \Big| \frac{ME}{BE} \quad \text{en dit geeft} \quad \frac{FM}{6} \Big| \frac{1\frac{2}{5}}{3\frac{3}{5}}$$

dus $FM = \dfrac{1\frac{2}{5} \cdot 6}{3\frac{3}{5}} = 2\tfrac{1}{3}$.

Bladzijde 57

7 **a** In $\triangle ADE$ geeft de stelling van Pythagoras $AE^2 = AD^2 + DE^2$

$$AE^2 = 8^2 + 6^2 = 100$$
$$BE = 10$$

Dus $\triangle ABE$ is gelijkbenig. Hieruit volgt $BF = EF$.

Dus $BF = \tfrac{1}{2}BE = \tfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$.

In $\triangle ABF$ geeft de stelling van Pythagoras $AF^2 = AB^2 - BF^2$

$$AF^2 = 10^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2 = 100 - 20 = 80$$
$$AF = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

b $\left.\begin{array}{l}\angle BAG = \angle FAB \\ \angle ABG = \angle AFB\ (= 90^\circ)\end{array}\right\} \triangle ABG \backsim \triangle AFB$

Hieruit volgt

$$\frac{BG}{FB} \Big| \frac{AB}{AF} \quad \text{en dit geeft} \quad \frac{BG}{\frac{40}{\sqrt{80}}} \Big| \frac{10}{\sqrt{80}}$$

$$BG = \frac{10 \cdot \frac{40}{\sqrt{80}}}{\sqrt{80}} = 5$$

$$CG = BC - BG = 8 - 5 = 3$$

10

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 58

8 $BR = x$ geeft $BQ = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$$\left.\begin{array}{l} BD = 3 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{3x}{\sqrt{2}} \\ BD = 4\sqrt{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3x}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} \\ 3x = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \\ 3x = 8 \\ x = 2\frac{2}{3} \end{array}$$

Dus $BR = 2\frac{2}{3}$.

9 Stel $AD = x$.
Dat geeft $CD = \frac{1}{2}x$, $AC = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, $BC = \frac{1}{4}x\sqrt{3}$ en $AB = \frac{1}{4}x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{4}x$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{omtrek } = AB + BC + CD + AD \\ \text{omtrek } = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x\sqrt{3} + \frac{1}{2}x + x = 20 \\ 2\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x\sqrt{3} = 20 \\ 9x + x\sqrt{3} = 80 \\ x(9 + \sqrt{3}) = 80 \\ x = \frac{80}{9 + \sqrt{3}} \end{array}$$

Dus $AD = \frac{80}{9 + \sqrt{3}}$.

10 Stel $AE = x$.
Dan is $EF = 8 - 2x$ en $EL = FG = HI = JK = x\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{omtrek } = 4 \cdot EF + 4 \cdot EL \\ \text{omtrek } = 28 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4(8 - 2x) + 4 \cdot x\sqrt{2} = 28 \\ 8 - 2x + x\sqrt{2} = 7 \\ 2x - x\sqrt{2} = 1 \\ x(2 - \sqrt{2}) = 1 \\ x = \frac{1}{2 - \sqrt{2}} \end{array}$$

Dus $AE = \frac{1}{2 - \sqrt{2}}$.

Bladzijde 59

11 **a** $\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
$\tan(\beta) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 56{,}30...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - 56{,}30...° \approx 19{,}7°$
De gevraagde hoek is 19,7°.

b m: $4x - 3y = 5$
$-3y = -4x + 5$
$y = 1\frac{1}{3}y - 1\frac{2}{3}$
$\tan(\alpha) = 1\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 53{,}13...°$
n: $x + 3y = 4$
$3y = -x + 4$
$y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$
$\tan(\beta) = -\frac{1}{3}$ geeft $\beta = -18{,}43...°$
$\alpha - \beta = 53{,}13...° - -18{,}43...° \approx 71{,}6°$
De gevraagde hoek is 71,6°.

c p: $9x + 5y = 18$
$5y = -9x + 18$
$y = -1\frac{4}{5}x + 3\frac{3}{5}$
$\tan(\alpha) = -1\frac{4}{5}$ geeft $\alpha = -60{,}9...°$
q: $7x - 2y = 10$
$-2y = -7x + 10$
$y = 3\frac{1}{2}x - 5$
$\tan(\beta) = 3\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 74{,}05...°$
$\beta - \alpha = 74{,}05...° - -60{,}94...° = 135°$
Dus de gevraagde hoek is $180° - 135° = 45°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

10.1 Afstanden en hoeken

Bladzijde 60

1 **a** $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times AB \times CE$

b $O(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \times BC \times AD$

c $O(\triangle ABC) = O(\triangle ABC)$

$\frac{1}{2} \times AB \times CE = \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$AB \times CE = BC \times AD$

Bladzijde 61

2 **a** $\left.\begin{array}{l} \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ \\ \angle ACB + \angle ABC = 90^\circ \\ \angle ABD = \angle ABC \end{array}\right\} \angle BAD = \angle ACB$

$\left.\begin{array}{l} \angle BAD = \angle ACB \\ \angle BDA = \angle BAC \end{array}\right\} \triangle DBA \backsim \triangle ABC$

b Uit $\triangle DBA \backsim \triangle ABC$ volgt

$\begin{array}{c|c} AD & AB \\ \hline AC & BC \end{array}$ en dit geeft $\begin{array}{c|c} AD & 8 \\ \hline 6 & 10 \end{array}$

$AD = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4{,}8$

c $\left.\begin{array}{l} \angle BAF = \angle AED \\ \angle AFB = \angle ADE \end{array}\right\} \triangle ABF \backsim \triangle EAD$

d Uit $\triangle ABF \backsim \triangle EAD$ volgt

$\begin{array}{c|c} AB & BF \\ \hline AE & AD \end{array}$ en dit geeft $\begin{array}{c|c} 6 & BF \\ \hline \sqrt{41} & 4 \end{array}$

$BF = \frac{6 \cdot 4}{\sqrt{41}} \approx 3{,}75$

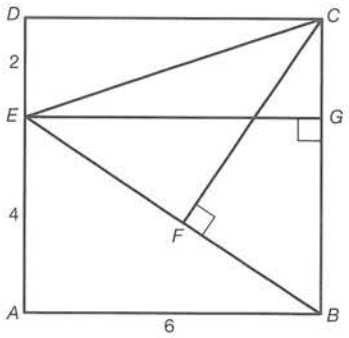
3 Teken EC en teken EG loodrecht op BC met G op BC.

$BE = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52}$

De zijde × hoogte-methode in $\triangle BCE$ geeft $BE \times CF = BC \times EG$

$\sqrt{52} \times CF = 6 \times 6$

$CF = \frac{36}{\sqrt{52}} \approx 4{,}99$



Bladzijde 62

4 $AE = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$

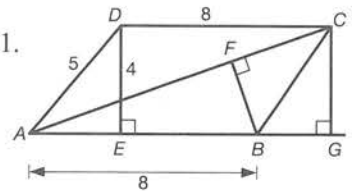
Verleng AB en teken CG loodrecht op AB, dan is $AG = AB + BG = AB + AE = 8 + 3 = 11$.

In $\triangle AGC$ geeft de stelling van Pythagoras $AC = \sqrt{11^2 + 4^2} = \sqrt{137}$.

In $\triangle ABC$geeft de zijde × hoogte-methode $AC \times BF = AB \times CG$

$\sqrt{137} \times BF = 8 \times 4$

$BF = \frac{32}{\sqrt{137}} \approx 2{,}73$



5 **a** $O(\triangle BMN) = O(ABCD) - O(\triangle ABM) - O(\triangle BCN) - O(\triangle NDM)$

$= 6 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2$

$= 24 - 6 - 6 - 3 = 9$

b $BM = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$

$O(\triangle BMN) = 9$

$\frac{1}{2} \times BM \times NE = 9$

$\frac{1}{2} \times \sqrt{40} \times NE = 9$

$NE = \frac{9}{\frac{1}{2}\sqrt{40}} = \frac{18}{\sqrt{40}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

6 Teken CF loodrecht op AD.
$CD = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ACD$ geeft $CD \times AE = AD \times CF$

$$4\sqrt{5} \times AE = 6 \times 8$$
$$AE = \frac{48}{4\sqrt{5}} = \frac{12}{\sqrt{5}} = \tfrac{12}{5}\sqrt{5} = 2\tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

7 Stel $AB = x$.
Dan is $BC = x - 4$, $AD = x - 5$ en $CE = x - 8$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft $AB \times CE = BC \times AD$

$$x(x - 8) = (x - 4)(x - 5)$$
$$x^2 - 8x = x^2 - 9x + 20$$
$$x = 20$$

Dus $AB = 20$.

8 Uit $\triangle ABN \backsim \triangle BCM$ volgt dat $\angle BAN = \angle CBM$.
$AN = BM = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABE + \angle CBM = 90^\circ \\ \angle BAE = \angle CBM\end{array}\right\} \angle ABE + \angle BAE = 90^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle ABE + \angle BAE = 90^\circ \\ \angle ABE + \angle BAE + \angle AEB = 180^\circ\end{array}\right\} \angle AEB = 90^\circ$$

De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABN$ geeft $AN \times BE = AB \times BN$

$$\sqrt{5} \times BE = 2 \times 1$$
$$BE = \frac{2}{\sqrt{5}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{5}$$

$EM = BM - BE = \sqrt{5} - \frac{2}{5}\sqrt{5} = \frac{3}{5}\sqrt{5}$

Bladzijde 63

9 In $\triangle ACD$ kun je met de cosinusregel AC berekenen.
Daarna kun je in $\triangle ACD$ met de sinusregel $\angle CAD$ berekenen.
In $\triangle ABC$ bereken je dan eerst $\angle BAC$ waarna met de cosinusregel BC is te berekenen.

Bladzijde 64

10 In $\triangle ACD$ is $\angle D$ stomp.
Het is niet mogelijk om in een driehoek twee stompe hoeken te hebben, dus vervalt in dit geval de tweede mogelijkheid bij het berekenen van een hoek met de sinusregel.

11 Teken AC.
De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC)$

$$AC^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cos(72^\circ)$$
$$AC^2 = 135{,}5...$$
$$AC = 11{,}64...$$

De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC)$

$$6^2 = 12^2 + 135{,}5... - 2 \cdot 12 \cdot 11{,}64... \cdot \cos(\angle BAC)$$
$$36 = 279{,}5... - 279{,}3... \cdot \cos(\angle BAC)$$
$$279{,}3...\cos(\angle BAC) = 243{,}5...$$
$$\cos(\angle BAC) = \frac{243{,}5...}{279{,}3...}$$
$$\cos(\angle BAC) = 0{,}87...$$
$$\angle BAC = 29{,}35...^\circ$$

$\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 52^\circ - 29{,}35...^\circ = 22{,}64...^\circ$
De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(\angle CAD)$

$$CD^2 = 135{,}5... + 6^2 - 2 \cdot 11{,}64... \cdot 6 \cdot \cos(22{,}64...^\circ)$$
$$CD^2 = 42{,}58...$$
$$CD = 6{,}52...$$
$$CD \approx 6{,}5$$

© Noordhoff Uitgevers bv

De cosinusregel in $\triangle ACD$ geeft $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos(\angle ADC)$

$$135{,}5... = 36 + 42{,}58... - 2 \cdot 6 \cdot 6{,}52... \cdot \cos(\angle ADC)$$
$$135{,}5... = 78{,}58... - 78{,}30... \cdot \cos(\angle ADC)$$
$$78{,}30... \cdot \cos(\angle ADC) = -56{,}91...$$
$$\cos(\angle ADC) = -0{,}726...$$
$$\angle ADC \approx 136{,}6°$$

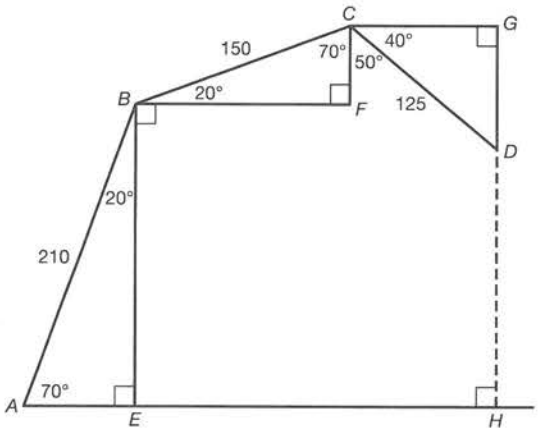
Bladzijde 65

12 In $\triangle PEQ$ geeft de stelling van Pythagoras $PQ = \sqrt{15^2 + 19^2} = \sqrt{586} = 24{,}20...$
In $\triangle KQZ$ geeft de cosinusregel $QZ^2 = KQ^2 + KZ^2 - 2 \cdot KQ \cdot KZ \cdot \cos(\angle QKZ)$

$$QZ^2 = 19^2 + 42^2 - 2 \cdot 19 \cdot 42 \cdot \cos(155°)$$
$$QZ^2 = 3571{,}46...$$
$$QZ = 59{,}76...$$

De zadelhoogte is gelijk aan $PQ + QZ = 24{,}20... + 59{,}76... \approx 84$ cm.

13 Teken horizontale en verticale lijnen door de punten B, C en D en zet de letters E, F, G en H erbij. Zie de figuur hiernaast.



In $\triangle AEB$ geldt $\sin(\angle A) = \dfrac{BE}{AB}$

$$BE = AB \sin(\angle A)$$
$$BE = 210 \sin(70°)$$
$$BE = 197{,}3...$$

In $\triangle AEB$ is $\angle B = 20°$.
$\angle ABE + 90° + \angle FBC = \angle ABC$
$20° + 90° + \angle FBC = 130°$
$\angle FBC = 20°$

In $\triangle BFC$ geldt $\sin(\angle B) = \dfrac{CF}{BC}$

$$CF = BC \sin(\angle B)$$
$$CF = 150 \sin(20°)$$
$$CF = 51{,}30...$$

In $\triangle BFC$ is $\angle B + \angle F + \angle C = 180°$

$$20° + 90° + \angle C = 180°$$
$$\angle C = 70°$$

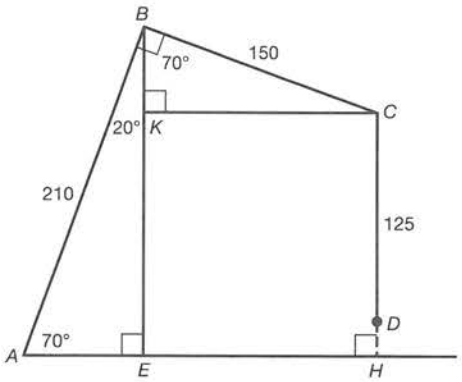
$\angle FCD = 120° - 70° = 50°$
$\angle DCG = 90° - 50° = 40°$

In $\triangle CGD$ geldt $\sin(\angle C) = \dfrac{DG}{CD}$

$$DG = CD \sin(\angle C)$$
$$DG = 125 \sin(40°)$$
$$DG = 80{,}34...$$

$DH = BE + CF - GD = 197{,}33... + 51{,}30... - 80{,}34... = 168{,}29...$
Dus de maximale hoogte van het punt D is 168 cm.

14 De hoogte van D is minimaal als $\angle B = 90°$. Zie de figuur hiernaast.



$\angle KBC = 90° - \angle ABE = 90° - 20° = 70°$

In $\triangle KCB$ geldt $\cos(\angle B) = \dfrac{BK}{BC}$

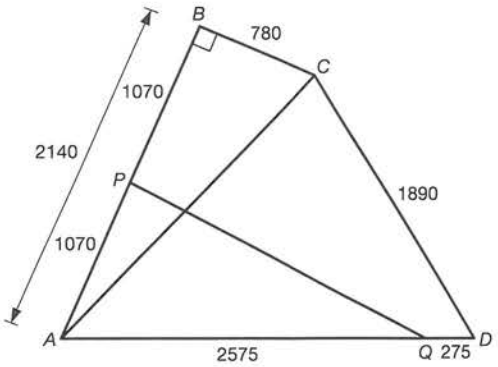
$$BK = BC \cos(\angle B)$$
$$BK = 150 \cos(70°)$$
$$BK = 51{,}30...$$

$BE - BK - CD = 197{,}33... - 51{,}30... - 125 = 21{,}03...$
De minimale hoogte van het punt D is gelijk aan 21 cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 66

15 Teken AC.



In $\triangle ABC$ geeft de stelling van Pythagoras

$AC = \sqrt{2140^2 + 780^2} = 2277{,}7...$

$\tan(\angle BAC) = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{780}{2140}$

$\angle BAC = 20{,}02...°$

In $\triangle ACD$ geeft de cosinusregel

$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(\angle CAD)$

$1890^2 = 2277{,}7...^2 + 2575^2 - 2 \cdot 2277{,}... \cdot 2575 \cdot \cos(\angle CAD)$

$11\,730\,248{,}5... \cdot \cos(\angle CAD) = 8\,246\,525$

$\cos(\angle CAD) = \dfrac{8\,246\,525}{11\,730\,248{,}5...}$

$\angle CAD = 45{,}33...°$

$\angle PAQ = 20{,}02...° + 45{,}33...° = 65{,}35...°$

$AQ = AD - DQ = 2575 - 275 = 2300$

In $\triangle APQ$ geeft de cosinusregel $PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos(\angle PAQ)$

$= 1070^2 + 2300^2 - 2 \cdot 1070 \cdot 2300 \cdot \cos(65{,}35...°)$

$= 4\,382\,591{,}89...$

$PQ = 2093{,}46...$

De normale route is $2140 + 780 + 1890 = 4810$ meter.

De ingekorte route is $1070 + 2093{,}46... + 275 = 3438{,}46...$ meter.

Het verschil is $4810 - 3438{,}46... \approx 1372$ meter.

10.2 Vergelijkingen in de meetkunde

Bladzijde 68

16 **a** $AB = x$ geeft $BC = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$ en $AC = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$

$AC = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$ geeft $CD = \dfrac{\frac{2}{3}x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{2}{3}x\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{2}{3}x\sqrt{6}}{2} = \frac{1}{3}x\sqrt{6}$ en $AD = \frac{1}{3}x\sqrt{6}$

Dus de omtrek van $ABCD$ is

$AB + BC + CD + AD = x + \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{1}{3}x\sqrt{6} + \frac{1}{3}x\sqrt{6} = x + \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{2}{3}x\sqrt{6}.$

b omtrek = 10 geeft $x + \frac{1}{3}x\sqrt{3} + \frac{2}{3}x\sqrt{6} = 10$

$x\left(1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{6}\right) = 10$

$x = \dfrac{10}{1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{3}\sqrt{6}} \approx 3{,}115$

Dus $AB \approx 3{,}115$.

Bladzijde 69

17 **a** Als je begint met $AB = x$ te stellen, dan kun je verder niets uitdrukken in x.

b $BD = x$ geeft $BC = x\sqrt{2}$ en $CD = x$

$CD = x$ geeft $AD = \dfrac{x}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}x\sqrt{3}$ en $AC = \frac{2}{3}x\sqrt{3}$

omtrek = 12 geeft $AD + DB + BC + AC = 12$

$\frac{1}{3}x\sqrt{3} + x + x\sqrt{2} + \frac{2}{3}x\sqrt{3} = 12$

$x + x\sqrt{3} + x\sqrt{2} = 12$

$x\left(1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = 12$

$x = \dfrac{12}{1 + \sqrt{3} + \sqrt{2}} = 2{,}89...$

$AB = AD + DB = \frac{1}{3}x\sqrt{3} + x = x\left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) = 2{,}89... \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{3} + 1\right) \approx 4{,}565$

© Noordhoff Uitgevers bv

18 Stel $AE = x$.

$AE = x$ geeft $EC = CD = AD = x$

$EC = x$ geeft $EB = x$ en $BC = x\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{omtrek} = AE + EB + BC + CD + AD \\ \text{omtrek} = 20\end{array}\right\} \begin{array}{l} x + x + x\sqrt{2} + x + x = 20 \\ 4x + x\sqrt{2} = 20 \\ x(4 + \sqrt{2}) = 20 \\ x = \dfrac{20}{4 + \sqrt{2}} = 3{,}69... \end{array}$$

Dus $AB = 2 \cdot 3{,}69... \approx 7{,}39$.

19 Stel $PQ = x$.

$$\left.\begin{array}{l} PQ = x \text{ geeft } PM = \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}x\sqrt{2} \\ AB = 4 \text{ geeft } AM = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{array}\right\} AP = AM - PM = 2\sqrt{2} - \tfrac{1}{2}x\sqrt{2}$$

omtrek = 9

$AB + BQ + PQ + AP = 9$

$4 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{2} + x + 2\sqrt{2} - \frac{1}{2}x\sqrt{2} = 9$

$x - x\sqrt{2} = 5 - 4\sqrt{2}$

$x(1 - \sqrt{2}) = 5 - 4\sqrt{2}$

$x = \dfrac{5 - 4\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} = 1{,}5857...$

Dus $PQ \approx 1{,}586$.

Bladzijde 70

20 Verleng MN tot het punt P op AB.

Stel $AB = x$. Dit geeft

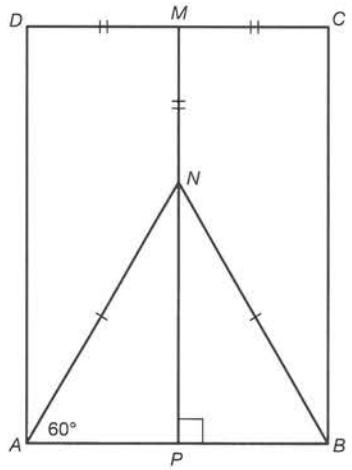
$AP = \frac{1}{2}x$, $NM = DM = \frac{1}{2}x$ en $NP = \frac{1}{2}x\sqrt{3}$, dus $AD = MP = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{3}$.

omtrek $= 2 \cdot AB + 2 \cdot AD$

omtrek = 20 geeft $2x + 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) = 20$

$$\begin{array}{l} 2x + x + x\sqrt{3} = 20 \\ 3x + x\sqrt{3} = 20 \\ x(3 + \sqrt{3}) = 20 \\ x = \dfrac{20}{3 + \sqrt{3}} \end{array}$$

Dus $AB = \dfrac{20}{3 + \sqrt{3}}$.

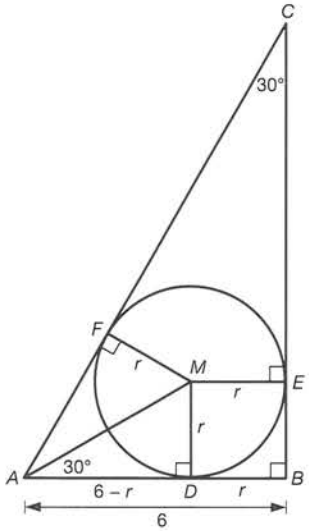


21 Teken AM. Zie de figuur hiernaast.

$$\left.\begin{array}{l} \angle DAM = \angle FAM \\ \angle DAF = 60° \end{array}\right\} \angle DAM = 30°$$

$$\left.\begin{array}{l} MD = r \text{ geeft } AD = r\sqrt{3} \\ AD = AB - BD = 6 - r \end{array}\right\} \begin{array}{l} r\sqrt{3} = 6 - r \\ r + r\sqrt{3} = 6 \\ r(1 + \sqrt{3}) = 6 \\ r = \dfrac{6}{1 + \sqrt{3}} \end{array}$$

Dus de straal van de cirkel is $\dfrac{6}{1 + \sqrt{3}}$.



© Noordhoff Uitgevers bv

22 Teken PQ loodrecht op AB.
Stel $AP = x$.
$AP = x$ geeft $AQ = PQ = \frac{x}{\sqrt{2}}$

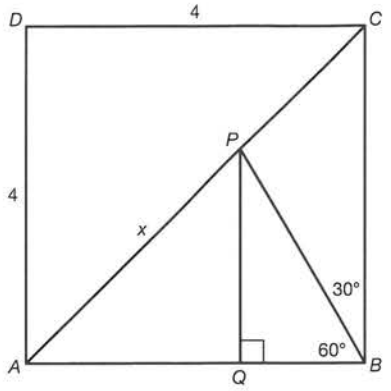
$PQ = \frac{x}{\sqrt{2}}$ geeft $BQ = \frac{x}{\sqrt{6}}$

$\left.\begin{array}{l} AB = 4 \\ AB = AQ + BQ \end{array}\right\}$ $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{6}} = 4$

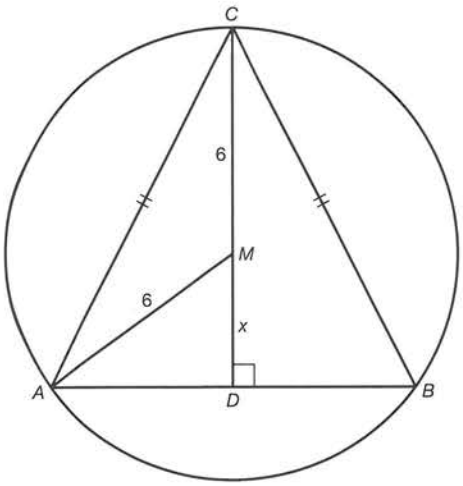
$$x\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = 4$$

$$x = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}} = 3{,}5863...$$

Dus $AP \approx 3{,}586$.



23 **a**



b $\left.\begin{array}{l} CD = DM + CM = x + 6 \\ AB = CD \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} AB = x + 6 \\ AD = \frac{1}{2}(x + 6) = \frac{1}{2}x + 3 \end{array}$

c $AD^2 + DM^2 = AM^2$
$\left(\frac{1}{2}x + 3\right)^2 + x^2 = 6^2$

$\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 + x^2 = 36$

$1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$

d $1\frac{1}{4}x^2 + 3x - 27 = 0$
$D = 3^2 - 4 \cdot 1\frac{1}{4} \cdot -27 = 144$
$x = \frac{-3 - 12}{2\frac{1}{2}} \vee x = \frac{-3 + 12}{2\frac{1}{2}}$
$x = -6 \vee x = 3{,}6$
vold. niet vold.
$\left.\begin{array}{l} AB = x + 6 \\ x = 3{,}6 \end{array}\right\} AB = 9{,}6$

10

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 71

24 Stel $AD = x$.

$\left.\begin{array}{l} AD = x \text{ geeft } AB = 2x \\ CD = 2AB \end{array}\right\} CD = 4x$

$\left.\begin{array}{l} CD = 4x \\ CM = 6 \end{array}\right\} MD = 4x - 6$

De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft

$AD^2 + DM^2 = AM^2$

$x^2 + (4x - 6)^2 = 6^2$

$x^2 + 16x^2 - 48x + 36 = 36$

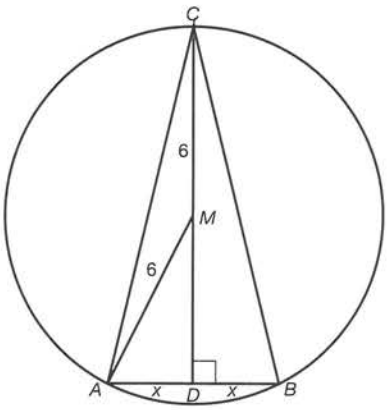
$17x^2 - 48x = 0$

$x(17x - 48) = 0$

$x = 0 \ \vee \ x = 2\frac{14}{17}$

vold. niet vold.

$x = 2\frac{14}{17}$ geeft $AB = 2x = 5\frac{11}{17}$



25 Teken de lijn door M en N. Deze snijdt AB in het punt P.

P is het midden van AB, dus $AP = 1$.

$\left.\begin{array}{l} PN = AD = 2 \\ MN = r \end{array}\right\} MP = 2 - r$

De stelling van Pythagoras in $\triangle APM$ geeft $AM^2 = AP^2 + MP^2$

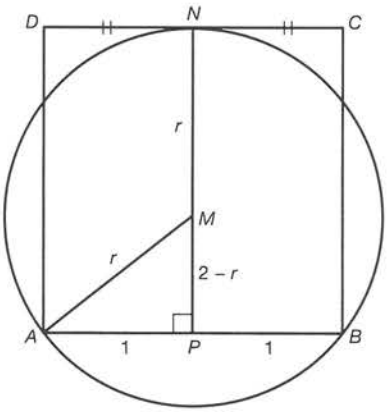
$r^2 = 1^2 + (2 - r)^2$

$r^2 = 1 + 4 - 4r + r^2$

$4r = 5$

$r = 1\frac{1}{4}$

Dus de straal van de cirkel is $1\frac{1}{4}$.



Bladzijde 72

26 Verleng MP. Zie de figuur hiernaast.

Stel $AP = x$. Dan is $MP = x$ en $NP = NM - MP = 9 - x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ANP$ geeft $AP^2 = AN^2 + NP^2$

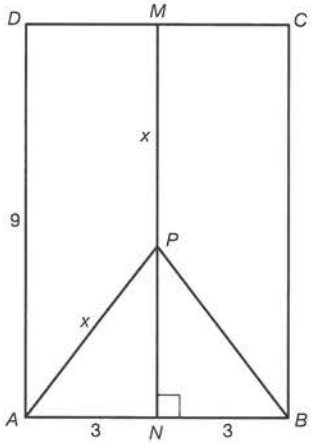
$x^2 = 3^2 + (9 - x)^2$

$x^2 = 9 + 81 - 18x + x^2$

$18x = 90$

$x = 5$

Dus $AP = 5$.



27 Verleng CM. Zie de figuur hiernaast.

Stel $AD = x$. Dan is $AC = 1\frac{1}{2}AB = 1\frac{1}{2} \cdot 2x = 3x$.

De stelling van Pythagoras in $\triangle ACD$ geeft $AD^2 + CD^2 = AC^2$

$x^2 + CD^2 = (3x)^2$

$CD^2 = 9x^2 - x^2$

$CD^2 = 8x^2$

$CD = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2}$

$DM = CD - CM = 2x\sqrt{2} - 6$

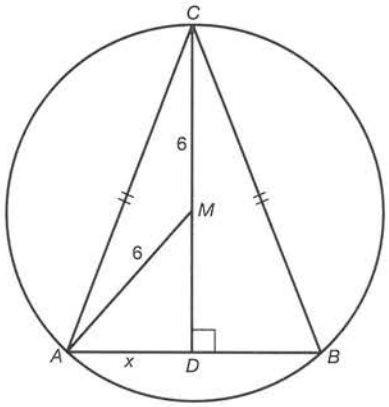
De stelling van Pythagoras in $\triangle ADM$ geeft $AD^2 + DM^2 = AM^2$

$x^2 + \left(2x\sqrt{2} - 6\right)^2 = 6^2$

Voer in $y_1 = x^2 + \left(2x\sqrt{2} - 6\right)^2$ en $y_2 = 36$.

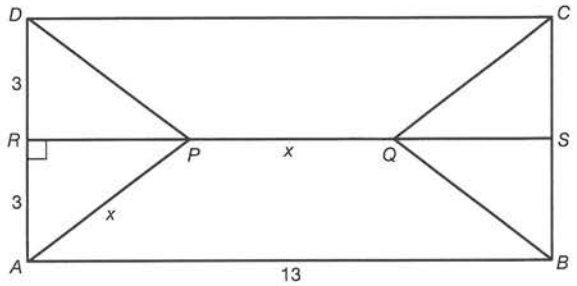
Intersect geeft $x = 3{,}771...$

Dus $AB = 2x = 2 \cdot 3{,}771... \approx 7{,}54$.

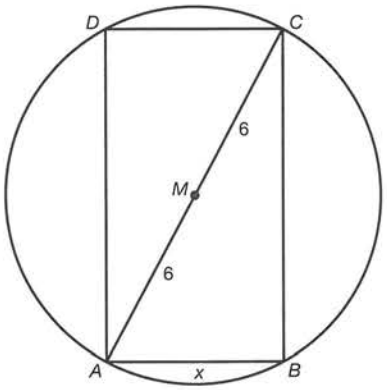


© Noordhoff Uitgevers bv

28 Teken RS. Zie de figuur hiernaast.
Stel $AP = x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle APR$ geeft
$PR^2 + AR^2 = AP^2$
$PR^2 + 3^2 = x^2$
$PR^2 = x^2 - 9$
$PR = \sqrt{x^2 - 9}$
$RS = 13$
$PR + PQ + QS = 13$
$\sqrt{x^2 - 9} + x + \sqrt{x^2 - 9} = 13$
$2\sqrt{x^2 - 9} = 13 - x$
kwadrateren geeft
$4(x^2 - 9) = 169 - 26x + x^2$
$4x^2 - 36 = 169 - 26x + x^2$
$3x^2 + 26x - 205 = 0$
$D = 26^2 - 4 \cdot 3 \cdot -205 = 3136$
$x = \frac{-26 - 56}{6} = -13\frac{2}{3} \vee x = \frac{-26 + 56}{6} = 5$
vold. niet vold.
Dus $AP = 5$.



29 Stel $AB = x$. Zie de figuur hiernaast.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
$x^2 + BC^2 = 12^2$
$BC^2 = 144 - x^2$
$BC = \sqrt{144 - x^2}$
$O(ABCD) = \frac{1}{2}O_{\text{cirkel}}$
$x\sqrt{144 - x^2} = \frac{1}{2}\pi \cdot 6^2$
$x\sqrt{144 - x^2} = 18\pi$
Voer in $y_1 = x\sqrt{144 - x^2}$ en $y_2 = 18\pi$.
Intersect geeft $x = 5{,}23761...$ en $x = 10{,}7966...$
$x = 5{,}23761...$ geeft $BC = \sqrt{144 - 5{,}23761...^2} = 10{,}7966...$ vold. niet.
$x = 10{,}7966...$ geeft $BC = \sqrt{144 - 10{,}7966...^2} = 5{,}23761...$ vold.
Dus $AB = 5{,}2376$.



10

10.3 Lijnen in een assenstelsel

Bladzijde 74

30 **a** k: $x - 2y = 4$
$-2y = -x + 4$
$y = \frac{1}{2}x - 2$
Dus $\text{rc}_k = \frac{1}{2}$.
l: $x - 2y = 5$
$-2y = -x + 5$
$y = \frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$
Dus $\text{rc}_l = \frac{1}{2}$.
$\text{rc}_k = \text{rc}_l$, dus $k \parallel l$.
b De lijnen k en l hebben geen gemeenschappelijk punt, dus het stelsel heeft geen oplossingen.

Bladzijde 75

31 **a** Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{2}{4} = \frac{p}{3} \neq \frac{5}{q}$.
$\frac{2}{4} = \frac{p}{3}$ geeft $p = \frac{2 \cdot 3}{4} = 1\frac{1}{2}$.
$\frac{2}{4} \neq \frac{5}{q}$ ofwel $2q \neq 20$, dus $q \neq 10$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\begin{cases} 2x + 2y = 5 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases} \left| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 4x + 4y = 10 \\ \underline{4x + 3y = 9} \end{cases} -$

$$\left.\begin{matrix} y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2x + 2 \cdot 1 = 5 \\ 2x + 2 = 5 \\ 2x = 3 \\ x = 1\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Dus het snijpunt is $(1\frac{1}{2}, 1)$.

c $\left.\begin{matrix} 2x + py = 5 \\ \text{door } (3, 1) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2 \cdot 3 + p \cdot 1 = 5 \\ 6 + p = 5 \\ p = -1 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} 4x + 3y = q \\ \text{door } (3, 1) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} q = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \\ q = 15 \end{matrix}$

32 **a** Samenvallen, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$.

$\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$

$\frac{-3}{1} = \frac{6}{q}$ geeft $q = \frac{1 \cdot 6}{-3} = -2$

b Een snijpunt, dus $\frac{p}{5} \neq \frac{-3}{1}$ geeft $p \neq -15$.

c Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{p}{5} = \frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$.

$\frac{p}{5} = \frac{-3}{1}$ geeft $p = -15$

$\frac{-3}{1} \neq \frac{6}{q}$ geeft $q \neq -2$

d $\left.\begin{matrix} px - 3y = 6 \\ \text{door } (2, 4) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} 2p - 3 \cdot 4 = 6 \\ 2p - 12 = 6 \\ 2p = 18 \\ p = 9 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} 5x + y = q \\ \text{door } (2, 4) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} q = 5 \cdot 2 + 4 \\ q = 14 \end{matrix}$

10

33 **a** $\left.\begin{matrix} y = ax + 4 \\ \text{door } (1, 6) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} a \cdot 1 + 4 = 6 \\ a = 2 \end{matrix}$

$\left.\begin{matrix} 3x - 2y = c \\ \text{door } (1, 6) \end{matrix}\right\} c = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 6 = -9$

b k: $y = ax + 4$

$-ax + y = 4$

Geen gemeenschappelijk punt, dus $\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c}$.

$\frac{-a}{3} = \frac{1}{-2}$ geeft $-a = \frac{1 \cdot 3}{-2} = -1\frac{1}{2}$, dus $a = 1\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{-2} \neq \frac{4}{c}$ geeft $c \neq -8$

c k: $y = 2x + 4$ snijden met l: $3x - 2y = c$ geeft $3x - 2(2x + 4) = c$

$$\begin{matrix} 3x - 4x - 8 = c \\ -x = c + 8 \\ \left.\begin{matrix} x = -c - 8 \\ y = 2x + 4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} y = 2(-c - 8) + 4 \\ y = -2c - 16 + 4 \\ y = -2c - 12 \end{matrix} \end{matrix}$$

Snijpunt boven de x-as geeft $y > 0$

$$\begin{matrix} -2c - 12 > 0 \\ -2c > 12 \\ c < -6 \end{matrix}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 76

34 **a** $q: y = 1\frac{1}{2}x + b$

$-1\frac{1}{2}x + y = b$

$-3x + 2y = 2b$

Een snijpunt, dus $\frac{a}{-3} \neq \frac{-5}{2}$

$2a \neq 15$

$a \neq 7\frac{1}{2}$

Een snijpunt voor $a \neq 7\frac{1}{2}$ en b mag elk getal zijn.

b $\left.\begin{array}{l} ax - 5y = 6 \\ \text{door } (3,4) \end{array}\right\}$ $3a - 5 \cdot 4 = 6$

$3a - 20 = 6$

$3a = 26$

$a = 8\frac{2}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y = 1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } (3,4) \end{array}\right\}$ $1\frac{1}{2} \cdot 3 + b = 4$

$4\frac{1}{2} + b = 4$

$b = -\frac{1}{2}$

c $p: 2x - 5y = 6$ snijden met $q: y = 1\frac{1}{2}x + b$ geeft $2x - 5\left(1\frac{1}{2}x + b\right) = 6$

$2x - 7\frac{1}{2}x - 5b = 6$

$-5\frac{1}{2}x = 5b + 6$

$-11x = 10b + 12$

$x = -\frac{10}{11}b - 1\frac{1}{11}$

Het snijpunt rechts van de lijn $x = 4$ geeft $-\frac{10}{11}b - 1\frac{1}{11} > 4$

$-10b - 12 > 44$

$-10b > 56$

$b < -5{,}6$

35 Samenvallen, dus $\frac{a}{2} = \frac{8}{a} = \frac{12}{pa}$.

$\frac{a}{2} = \frac{8}{a}$ geeft $a^2 = 16$

$a = 4 \vee a = -4$

$a = 4$ geeft $\frac{4}{2} = \frac{12}{4p}$

$16p = 24$

$p = 1\frac{1}{2}$

$a = -4$ geeft $\frac{-4}{2} = \frac{12}{-4p}$

$16p = 24$

$p = 1\frac{1}{2}$

Dus $p = 1\frac{1}{2}$ en $a = 4 \vee a = -4$.

36 **a** $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71{,}56...°$

$\tan(\beta) = 2$ geeft $\beta = 63{,}43...°$

$\alpha - \beta = 8{,}13...°$

Dus $\angle(l, m) \approx 8{,}1°$.

b $\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71{,}56...°$

$\tan(\beta) = 2$ geeft $\beta = 63{,}43...°$

$\beta - \alpha = 135°$

Dus $\angle(l, m) = 180° - 135° = 45°$.

c $l \perp m$ geeft $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_m = -1$

$a \cdot 2 = -1$

$a = -\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 78

37 **a** k: $x - 5y = -7$

$-5y = -x - 7$

$y = \frac{1}{5}x + 1\frac{2}{5}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{5}$ geeft $\alpha = 11{,}30...°$

l: $x + 2y = 0$

$2y = -x$

$y = -\frac{1}{2}x$

$\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$ geeft $\beta = -26{,}56...°$

De hoek tussen k en l is $11{,}30...° - -26{,}56...° = 37{,}87...° \approx 37{,}9°$.

b $\begin{cases} x - 5y = -7 \\ x + 2y = 0 \end{cases} -$

$-7y = -7$

$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot 1 = 0 \\ x = -2 \end{array}$

Dus $A(-2, 1)$.

$d(A, B) = \sqrt{(3 - -2)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$

c De lijn m gaat door B en staat loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } 2x - y = b \\ \text{door } B(3, 2) \end{array}\right\} b = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

Dus m: $2x - y = 4$.

m snijden met l geeft het punt C.

$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right|$ geeft $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases} +$

$5x = 8$

$\left.\begin{array}{l} x = 1\frac{3}{5} \\ x + 2y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{3}{5} + 2y = 0 \\ 2y = -1\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{array}$

Dus $C\left(1\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

$d(B, l) = d(B, C) = \sqrt{\left(3 - 1\frac{3}{5}\right)^2 + \left(2 - -\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{245}{25}} = 1\frac{2}{5}\sqrt{5}$

38 **a** $\left.\begin{array}{l} \text{rc}_{OC} = \dfrac{3 - 0}{2 - 0} = 1\frac{1}{2} \\ \text{rc}_{BC} = \dfrac{1 - 3}{5 - 2} = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \text{rc}_{OC} \cdot \text{rc}_{BC} = 1\frac{1}{2} \cdot -\frac{2}{3} = -1$

Dus $\angle OCB = 90°$.

b $\text{rc}_{OA} = \dfrac{-1 - 0}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18{,}43...°$

$\text{rc}_{AB} = \dfrac{1 - -1}{5 - 3} = 1$

$\tan(\beta) = 1$ geeft $\beta = 45°$

$\angle(OA, AB) = 45° - -18{,}43...° = 63{,}43...°$

$\angle OAB$ is stomp, dus $\angle OAB = 180° - 63{,}43...° = 116{,}56...°$.

Dus $\angle OAB \approx 116{,}6°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c Stel AB: $y = ax + b$ met $a = \frac{1 - -1}{5 - 3} = 1$.

$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } A(3, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$

Dus AB: $y = x - 4$.

De lijn l staat loodrecht op AB en gaat door C.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } y = -x + b \\ \text{door } C(2, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$

Dus l: $y = -x + 5$.

l snijden met AB geeft het punt D.

$x - 4 = -x + 5$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

$x = 4\frac{1}{2}$ geeft $y = \frac{1}{2}$, dus $D\left(4\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$d(C, AB) = d(C, D) = \sqrt{\left(4\frac{1}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 3\right)^2} = \sqrt{\left(2\frac{1}{2}\right)^2 + \left(2\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} \approx 3{,}54$

39 **a** $\text{rc}_{PR} = \frac{6 - 3}{9 - 0} = \frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 18{,}43...°$

$\text{rc}_{ST} = \frac{4 - 6}{10 - 2} = -\frac{1}{4}$

$\tan(\beta) = -\frac{1}{4}$ geeft $\beta = -14{,}03...°$

$\alpha - \beta = 18{,}43...° - -14{,}03...° = 32{,}47...°$

Dus de hoek tussen de routes is 32,5°.

b $\text{rc}_{PR} = \frac{1}{3}$ en $P(0, 3)$ geeft PR: $y = \frac{1}{3}x + 3$.

$\text{rc}_{FE} = \frac{3 - 2}{7 - 3} = \frac{1}{4}$

$\text{rc}_{FE} < \text{rc}_{PR}$, dus het punt F ligt het dichtst bij de route van schip I.

$\text{rc}_{PR} = \frac{1}{3}$, dus de lijn k loodrecht op route PR heeft $\text{rc}_k = -3$.

$\left.\begin{array}{l} y = -3x + b \\ \text{door } F(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 \cdot 3 + b = 2 \\ -9 + b = 2 \\ b = 11 \end{array}$

Dus k: $y = -3x + 11$.

k snijden met PR geeft het punt G.

$\frac{1}{3}x + 3 = -3x + 11$

$3\frac{1}{3}x = 8$

$\left.\begin{array}{l} x = 2{,}4 \\ y = \frac{1}{3}x + 3 \end{array}\right\} y = \frac{1}{3} \cdot 2{,}4 + 3 = 3{,}8$

Dus $G(2{,}4; 3{,}8)$.

$d(F, \text{route I}) = d(F, G) = \sqrt{(2{,}4 - 3)^2 + (3{,}8 - 2)^2} = \sqrt{3{,}6} = 1{,}89...$

De afstand is korter dan de voorgeschreven minimale afstand van 200 m.

Route I voldoet dus niet aan de eis.

10

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 79

40 **a** $\text{rc}_{AP} = \dfrac{0 - 2\frac{1}{2}}{6 - 3\frac{1}{2}} = -1$

$\tan(\alpha) = -1$ geeft $\alpha = -45°$

$\text{rc}_{BP} = \dfrac{6 - 2\frac{1}{2}}{4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = 3\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 74{,}05...°$

$\beta - \alpha = 74{,}05...° - -45° = 119{,}05...°$

$\angle APB$ is stomp, dus $\angle APB = 119{,}05...°$.

$\text{rc}_{CP} = \dfrac{2 - 2\frac{1}{2}}{0 - 3\frac{1}{2}} = \frac{1}{7}$

$\tan(\gamma) = \frac{1}{7}$ geeft $\gamma = 8{,}13...°$

$\gamma - \alpha = 8{,}13...° - -45° = 53{,}13...°$

$\angle APC$ is stomp, dus $\angle APC = 180° - 53{,}13...° = 126{,}86...°$.

$\angle BPC = 360° - \angle APB - \angle APC = 360° - 119{,}05...° - 126{,}05...° = 114{,}07...°$

Dus $\angle APC$ is de grootste hoek.

b $d(P, A) = \sqrt{(6 - 3\frac{1}{2})^2 + (0 - 2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{(2\frac{1}{2})^2 + (2\frac{1}{2})^2} = \sqrt{12\frac{1}{2}} = 3{,}535...$

Stel AC: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{0 - 2}{6 - 0} = -\frac{1}{3}$.

Door $C(0, 2)$, dus AC: $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

De lijn k staat loodrecht op AC en gaat door P.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = 3x + b \\ \text{door } P(3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 3 \cdot 3\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ 10\frac{1}{2} + b = 2\frac{1}{2} \\ b = -8 \end{array}$

Dus k: $y = 3x - 8$.

k snijden met AC geeft het punt D.

$3x - 8 = -\frac{1}{3}x + 2$

$3\frac{1}{3}x = 10$

$x = 3$

$x = 3$ geeft $y = 1$, dus $D(3, 1)$.

$d(P, AC) = d(P, D) = \sqrt{(3\frac{1}{2} - 3)^2 + (2\frac{1}{2} - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{2\frac{1}{2}} = 1{,}581...$

$2 \cdot d(P, AC) = 2 \cdot 1{,}581... = 3{,}162...$ en dit is niet gelijk aan $d(P, A) = 3{,}535...$

Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

10

alternatieve uitwerking

De loodlijn uit P op AC snijdt AC in het punt D.

$\text{rc}_{AC} = \dfrac{0 - 2}{6 - 0} = -\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18{,}43...°$

$\text{rc}_{AP} = -1$

$\tan(\beta) = -1$ geeft $\beta = -45°$

$\beta - \alpha = -45° - -18{,}43...° = 26{,}56...°$

Dus $\angle PAD = 26{,}56...°$.

in $\triangle APD$ is $\sin(26{,}56...°) = \dfrac{d(P, AC)}{d(P, A)}$

$$d(P, A) = \frac{d(P, AC)}{\sin(26{,}56...°)} = \frac{d(P, AC)}{0{,}447...} = 2{,}23... \cdot d(P, AC)$$

Dus $d(P, A) \neq 2 \cdot d(P, AC)$.

41 **a** $\text{rc}_{k_1} = 3$, dus $\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71{,}56...°$

$\text{rc}_{k_3} = 1$, dus $\tan(\beta) = 1$ geeft $\alpha = 45°$.

$\angle(k_1, k_3) = 71{,}56...° - 45° = 26{,}56...°$

$\text{rc}_{k_9} = \frac{1}{3}$, dus $\tan(\gamma) = \frac{1}{3}$ geeft $\gamma = 18{,}43...°$

$\angle(k_3, k_9) = 45° - 18{,}43...° = 26{,}56...°$

Dus Maud heeft gelijk.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $\text{rc}_{k_4} = \frac{3}{4}$, dus $\text{rc}_{\text{loodlijn}} = -1\frac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{loodlijn: } y = -1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 6)\end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 6 \\ -5\frac{1}{3} + b = 6 \\ b = 11\frac{1}{3}\end{array}$$

Dus loodlijn: $y = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$.

k_4 snijden met de loodlijn geeft $\frac{3}{4}x = -1\frac{1}{3}x + 11\frac{1}{3}$

$$2\tfrac{1}{12}x = 11\tfrac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 5\frac{11}{25} \\ y = \frac{3}{4}x \end{array}\right\} y = \tfrac{3}{4} \cdot 5\tfrac{11}{25} = 4\tfrac{2}{25}$$

$$d(A, k_4) = d\left(A, \left(5\tfrac{11}{25}, 4\tfrac{2}{25}\right)\right) = \sqrt{\left(5\tfrac{11}{25} - 4\right)^2 + \left(4\tfrac{2}{25} - 6\right)^2} = 2\tfrac{2}{5}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\frac{1}{2} \cdot d(A, k_4) = 2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{5} = 6 \\ d(A,\ x\text{-as}) = 6 \end{array}\right\} \text{Ischa heeft dus gelijk.}$$

c $\tan(\alpha) < \tan(10°)$

$$\frac{3}{a} < \tan(10°)$$

$$a > \frac{3}{\tan(10°)} = 17{,}013...$$

Dus vanaf $a = 18$ maakt k_a een hoek met de x-as die kleiner is dan 10°.

10.4 Cirkels, raaklijnen en afstanden

Bladzijde 81

42 **a** $r = \sqrt{25} = 5$ en $M(3, 4)$

b $(0 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$ klopt, dus $O(0, 0)$ op c.
$(6 - 3)^2 + (0 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$ klopt, dus $A(6, 0)$ op c.
$(-1 - 3)^2 + (1 - 4)^2 = 16 + 9 = 25$ klopt, dus $B(-1, 1)$ op c.
$(6 - 3)^2 + (7 - 4)^2 = 9 + 9 \neq 25$, dus $C(6, 7)$ niet op c.
$(0 - 3)^2 + (8 - 4)^2 = 9 + 16 = 25$ klopt, dus $D(0, 8)$ op c.

c $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$
$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 = 25$
$x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$
Dus $a = -6$, $b = -8$ en $c = 0$.

Bladzijde 82

43 **a** $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 2y + 10 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y - 1)^2 - 1 + 10 = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 7$
Dus de straal is $\sqrt{7}$ en het middelpunt is (4, 1).

b $x^2 + y^2 + 6x - 5y + 13 = 0$
$x^2 + 6x + y^2 - 5y + 13 = 0$
$(x + 3)^2 - 9 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 - 6\frac{1}{4} + 13 = 0$
$(x + 3)^2 + \left(y - 2\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$
Dus de straal is $1\frac{1}{2}$ en het middelpunt is $\left(-3, 2\frac{1}{2}\right)$.

c $x^2 + y^2 - 9x - 3y + 10 = 0$
$x^2 - 9x + y^2 - 3y + 10 = 0$
$\left(x - 4\frac{1}{2}\right)^2 - 20\frac{1}{4} + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 - 2\frac{1}{4} + 10 = 0$
$\left(x - 4\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - 1\frac{1}{2}\right)^2 = 12\frac{1}{2}$
Dus de straal is $\sqrt{12\frac{1}{2}}$ en het middelpunt is $\left(4\frac{1}{2}\ 1\frac{1}{2}\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

44 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 1)^2 - 1 + 6 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$
Dus $r = 2$ en het middelpunt is $M(3, 1)$.
$d(A, M) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{2}$
$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel.

b $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 21 = 0$
$x^2 + 2x + y^2 - 4y - 21 = 0$
$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 - 21 = 0$
$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 26$
Dus $r = \sqrt{26}$ en het middelpunt is $M(-1, 2)$.
$d(B, M) = \sqrt{(-1 - 4)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{26}$
$d(B, M) = r$, dus B ligt op de cirkel.

c $x^2 + y^2 - 2x - 8y = 23$
$x^2 - 2x + y^2 - 8y = 23$
$(x - 1)^2 - 1 + (y - 4)^2 - 16 = 23$
$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 40$
Dus $r = \sqrt{40}$ en het middelpunt is $M(1, 4)$.
$d(C, M) = \sqrt{(1 - -4)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{34}$
$d(C, M) < r$, dus C ligt binnen de cirkel.

45 **a** $\left.\begin{array}{l}(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = r^2 \\ \text{door } O(0, 0)\end{array}\right\} r^2 = (0 - 6)^2 + (0 - 3)^2 = 45$
c_1: $(x - 6)^2 + (y - 3)^2 = 45$
$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 6y + 9 = 45$
$x^2 + y^2 - 12x - 6y = 0$

b $\left.\begin{array}{l}(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = r^2 \\ \text{door } (0, 3)\end{array}\right\} r^2 = (0 + 3)^2 + (3 - 5)^2 = 13$
c_2: $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 13$
$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$
$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 21 = 0$

c Middellijn AB met $A(2, 0)$ en $B(8, 0)$ geeft middelpunt $M(5, 0)$ en $r = 3$.
c_3: $(x - 5)^2 + y^2 = 9$
$x^2 - 10x + 25 + y^2 = 9$
$x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

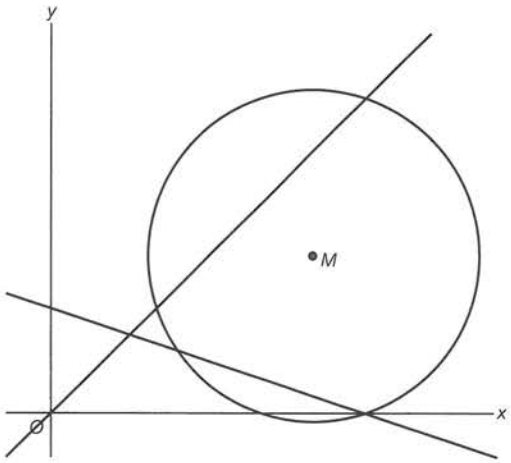
d Middellijn CD met $C(1, 2)$ en $D(7, 4)$ geeft middelpunt $M(4, 3)$ en $r^2 = (4 - 1)^2 + (3 - 2)^2 = 10$.
c_4: $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$
$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 6y + 9 = 10$
$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

10

46 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 24 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 6y + 24 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 3)^2 - 9 + 24 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10$
Dus $M(5, 3)$ en $r = \sqrt{10}$.
$d(M, x\text{-as}) = 3$

b $d(M, y\text{-as}) = 5$

c De lijn l gaat door M en staat loodrecht op
$\left.\begin{array}{r}k: y = x, \text{ dus } l: y = -x + b \\ \text{door } M(5, 3)\end{array}\right\} \begin{array}{l}-5 + b = 3 \\ b = 8\end{array}$
Dus $l: y = -x + 8$.
l snijden met k geeft $x = -x + 8$
$2x = 8$
$x = 4$
$x = 4$ geeft $y = 4$.
$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(5 - 4)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{2}$



© Noordhoff Uitgevers bv

d De lijn m door M loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} m\text{: } 3x - y = c \\ \text{door } M(5, 3) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 5 - 3 = 12$

Dus m: $3x - y = 12$.

m snijden met l geeft $\left\{\begin{array}{l|l} 3x - y = 12 & 3 \\ x + 3y = 6 & 1 \end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} 9x - 3y = 36 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right. +$

$10x = 42$

$\left.\begin{array}{l} x = 4{,}2 \\ x + 3y = 6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4{,}2 + 3y = 6 \\ 3y = 1{,}8 \\ y = 0{,}6 \end{array}$

$d(M, l) = d(M, (4{,}2; 0{,}6)) = \sqrt{(5 - 4{,}2)^2 + (3 - 0{,}6)^2} = \sqrt{6{,}4}$

47 **a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 8$

$x^2 + 4x + y^2 - 6y = 8$

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 = 8$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 21$

Dus $M(-2, 3)$ en $r = \sqrt{21}$.

$d(A, M) = \sqrt{(2 - -2)^2 + (1 - 3)^2} = \sqrt{20}$

$d(A, M) < r$, dus A ligt binnen de cirkel.

b De lijn l door M loodrecht op k.

$\left.\begin{array}{l} l\text{: } 2x - 3y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array}\right\} c = 2 \cdot -2 - 3 \cdot 3 = -13$

Dus l: $2x - 3y = -13$.

l snijden met k geeft $\left\{\begin{array}{l|l} 2x - 3y = -13 & 2 \\ 3x + 2y = 13 & 3 \end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} 4x - 6y = -26 \\ 9x + 6y = 39 \end{array}\right. +$

$13x = 13$

$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ 3x + 2y = 13 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + 2y = 13 \\ 2y = 10 \\ y = 5 \end{array}$

Dus het snijpunt is $B(1, 5)$.

$d(M, k) = d(M, B) = \sqrt{(-2 - 1)^2 + (3 - 5)^2} = \sqrt{13}$

48 **a** $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$

$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 7 = 0$

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 - 9 - 7 = 0$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 20$

Dus de straal is $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

b De lijn k door M loodrecht op l.

$\left.\begin{array}{l} k\text{: } x + 2y = c \\ \text{door } M(-2, 3) \end{array}\right\} c = -2 + 2 \cdot 3 = 4$

Dus k: $x + 2y = 4$.

k snijden met l geeft $\left\{\begin{array}{l|l} 2x - y = 3 & 1 \\ x + 2y = 4 & 2 \end{array}\right| \left\{\begin{array}{l} 2x - y = 3 \\ 2x + 4y = 8 \end{array}\right. -$

$-5y = -5$

$\left.\begin{array}{l} y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x + 2 \cdot 1 = 4 \\ x = 2 \end{array}$

Dus het snijpunt is $A(2, 1)$.

$d(M, l) = d(M, A) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{20}$

c De afstand van M tot l is gelijk aan de straal van c, dus l raakt c.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 84

49 **a** De lijn l door M loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon 3x-2y=c \\ \text{door } M(2,5) \end{array}\right\} c=3\cdot 2-2\cdot 5=-4$$

Dus $l\colon 3x-2y=-4$.

k en l snijden geeft het punt A.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ 3x-2y=-4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 2 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 4x+6y=12 \\ 9x-6y=-12 \end{array}\right. +$$

$$\begin{array}{l} 13x=0 \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ 2x+3y=6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3y=6 \\ y=2 \end{array} \end{array}$$

Dus $A(0, 2)$.

$r=d(M,k)=d(M,A)=\sqrt{(2-0)^2+(5-2)^2}=\sqrt{13}$

Dus $c_1\colon (x-2)^2+(y-5)^2=13$.

b c_2 is de cirkel met middelpunt $M(-1, 3)$ en straal $\sqrt{29}$.

$\text{rc}_{MB}=\dfrac{3-1}{-1-4}=-\frac{2}{5}$, dus $\text{rc}_l=\frac{5}{2}=2\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y=2\frac{1}{2}x+b \\ \text{door } B(4,1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\frac{1}{2}\cdot 4+b=1 \\ 10+b=1 \\ b=-9 \end{array}$$

Dus $l\colon y=2\frac{1}{2}x-9$.

c Substitutie van $y=3x+b$ in $x^2+y^2-4x-2y-5=0$ geeft

$x^2+(3x+b)^2-4x-2(3x+b)-5=0$

$x^2+9x^2+6bx+b^2-4x-6x-2b-5=0$

$10x^2+(6b-10)x+b^2-2b-5=0$

$D=(6b-10)^2-4\cdot 10\cdot(b^2-2b-5)$

$\quad=36b^2-120b+100-40b^2+80b+200$

$\quad=-4b^2-40b+300$

Raken, dus $D=0$

$-4b^2-40b+300=0$

$b^2+10b-75=0$

$(b-5)(b+15)=0$

$b=5 \vee b=-15$

50 **a** De lijn l door M loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon 2x+3y=c \\ \text{door } M(2,1) \end{array}\right\} c=2\cdot 2+3\cdot 1=7$$

Dus $l\colon 2x+3y=7$.

k en l snijden geeft het punt A.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=-9 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=-27 \end{array}\right. +$$

$$\begin{array}{l} 13x=-13 \\ \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ 2x+3y=7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\cdot -1+3y=7 \\ 3y=9 \\ y=3 \end{array} \end{array}$$

Dus $A(-1, 3)$.

$r=d(M,k)=d(M,A)=\sqrt{(2--1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

Dus $c\colon (x-2)^2+(y-1)^2=13$.

b $l\colon x+y=4$ ofwel $y=4-x$

Substitutie van $y=4-x$ in $(x-2)^2+(y-1)^2=13$ geeft $(x-2)^2+(4-x-1)^2=13$

$(x-2)^2+(3-x)^2=13$

$x^2-4x+4+9-6x+x^2=13$

$2x^2-10x=0$

$2x(x-5)=0$

$x=0 \vee x=5$

$x=0$ geeft het punt $P(0, 4)$ en $x=5$ geeft het punt $Q(5, -1)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 85

51 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 12 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 4y + 12 = 0$
$(x-5)^2 - 25 + (y-2)^2 - 4 + 12 = 0$
$(x-5)^2 + (y-2)^2 = 17$
Dus $M(5, 2)$ en $r = \sqrt{17}$.
$\text{rc}_{MA} = \dfrac{2-3}{5-1} = -\frac{1}{4}$, dus $\text{rc}_k = 4$.
$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 4x + b \\ \text{door } A(1,3) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 4 \cdot 1 + b = 3 \\ b = -1 \end{array}$
Dus $k\colon y = 4x - 1$.
$\text{rc}_{MB} = \dfrac{2 - -2}{5-6} = -4$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{4}$.
$\left.\begin{array}{l} l\colon y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } B(6,-2) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \frac{1}{4} \cdot 6 + b = -2 \\ 1\frac{1}{2} + b = -2 \\ b = -3\frac{1}{2} \end{array}$
Dus $l\colon y = \frac{1}{4}x - 3\frac{1}{2}$.

b $\tan(\alpha) = 4$ geeft $\alpha = 75{,}96...°$
$\tan(\beta) = \frac{1}{4}$ geeft $\beta = 14{,}03...°$
$\alpha - \beta = 75{,}96...° - 14{,}03...° = 61{,}92...°$
Dus $\angle(k, l) \approx 61{,}9°$.

52 **a** Substitutie van $y = -2x + b$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
$x^2 + (-2x + b)^2 - 10x - 6(-2x + b) + 29 = 0$
$x^2 + 4x^2 - 4bx + b^2 - 10x + 12x - 6b + 29 = 0$
$5x^2 + (2 - 4b)x + b^2 - 6b + 29 = 0$
$D = (2 - 4b)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (b^2 - 6b + 29) = 4 - 16b + 16b^2 - 20b^2 + 120b - 580 = -4b^2 + 104b - 576$
Raken, dus $D = 0$
$-4b^2 + 104b - 576 = 0$
$b^2 - 26b + 144 = 0$
$(b - 8)(b - 18) = 0$
$b = 8 \vee b = 18$
Dus de lijnen zijn $y = -2x + 8$ en $y = -2x + 18$.

b $\left.\begin{array}{l} y = ax + b \\ \text{door } (0,3) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 0 + b = 3 \\ b = 3 \end{array}$
Dus de lijn $y = ax + 3$ gaat door $(0, 3)$.
Substitutie van $y = ax + 3$ in $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 29 = 0$ geeft
$x^2 + (ax + 3)^2 - 10x - 6(ax + 3) + 29 = 0$
$x^2 + a^2x^2 + 6ax + 9 - 10x - 6ax - 18 + 29 = 0$
$(1 + a^2)x^2 - 10x + 20 = 0$
$D = (-10)^2 - 4 \cdot (1 + a^2) \cdot 20 = 100 - 80 - 80a^2 = 20 - 80a^2$
Raken, dus $D = 0$
$20 - 80a^2 = 0$
$-80a^2 = -20$
$a^2 = \frac{1}{4}$
$a = \frac{1}{2} \vee a = -\frac{1}{2}$

10

© Noordhoff Uitgevers bv

53 **a** De lijn l door M loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon x-4y=c \\ \text{door } M(4,3) \end{array}\right\} c=4-4\cdot 3=-8$$

Dus $l\colon x-4y=-8$.

k en l snijden geeft het punt A.

$$\left\{\begin{array}{l|l} 4x+y=36 & 4 \\ x-4y=-8 & 1 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 16x+4y=144 \\ x-4y=-8 \end{array}\right. +$$

$$\begin{array}{l} 17x=136 \\ x=8 \\ 4x+y=36 \end{array}\left.\right\} \begin{array}{l} 4\cdot 8+y=36 \\ 32+y=36 \\ y=4 \end{array}$$

Dus $A(8, 4)$.

$r=d(M,k)=d(M,A)=\sqrt{(8-4)^2+(4-3)^2}=\sqrt{17}$

Dus $c_1\colon (x-4)^2+(y-3)^2=17$.

b $$\left.\begin{array}{l} (x-4)^2+(y-3)^2=17 \\ y=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (x-4)^2+(-3)^2=17 \\ (x-4)^2+9=17 \\ (x-4)^2=8 \\ x-4=2\sqrt{2} \vee x-4=-2\sqrt{2} \\ x=4+2\sqrt{2} \vee x=4-2\sqrt{2} \end{array}$$

Dus $B\left(4+2\sqrt{2},0\right)$ en $C\left(4-2\sqrt{2},0\right)$.

c Het midden N van BC is het punt (4, 0) en de straal van c_2 is $2\sqrt{2}$.

Dus $c_2\colon (x-4)^2+y^2=8$.

d Lijnen door O hebben vergelijking $y=ax$.

Substitutie van $y=ax$ in $(x-4)^2+y^2=8$ geeft

$(x-4)^2+(ax)^2=8$

$x^2-8x+16+a^2x^2=8$

$(1+a^2)x^2-8x+8=0$

$D=(-8)^2-4\cdot(1+a^2)\cdot 8=64-32-32a^2=32-32a^2$

Raken, dus $D=0$

$32-32a^2=0$

$-32a^2=-32$

$a^2=1$

$a=1 \vee a=-1$

Dus $l_1\colon y=x$ en $l_2\colon y=-x$.

54 **a** $x^2+y^2-10x-8y+9=0$

$x^2-10x+y^2-8y+9=0$

$(x-5)^2-25+(y-4)^2-16+9=0$

$(x-5)^2+(y-4)^2=32$

Dus de straal is $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$ en $M(5, 4)$.

b $d(A,M)=\sqrt{(10-5)^2+(2-4)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

c $\sqrt{29}<\sqrt{32}$, A ligt binnen de cirkel.

$d(A,c)=r-d(A,M)=\sqrt{32}-\sqrt{29}$

Bladzijde 87

55 M op k_1, dus $3+4y_M=16$

$4y_M=13$

$y_M=3\frac{1}{4}$

Dus de straal r_1 van c_1 is $3\frac{1}{4}$ en $M\left(3,3\frac{1}{4}\right)$.

$d(M,N)=\sqrt{(8-3)^2+\left(2-3\frac{1}{4}\right)^2}=\sqrt{25+1\frac{9}{16}}=\sqrt{26\frac{9}{16}}=5{,}15\ldots$

$r_1+r_2=3\frac{1}{4}+2=5\frac{1}{4}>d(M,N)$, dus de cirkels snijden elkaar.

© Noordhoff Uitgevers bv

56 **a** c_1 raakt de x-as en het middelpunt is $M(4, 2)$, dus de straal van c_1 is 2.
c_1: $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$

b $y = 1\frac{1}{3}x$ substitueren in $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ geeft $(x-4)^2 + \left(1\frac{1}{3}x - 2\right)^2 = 4$

$$x^2 - 8x + 16 + 1\tfrac{7}{9}x^2 - 5\tfrac{1}{3}x + 4 = 4$$
$$2\tfrac{7}{9}x^2 - 13\tfrac{1}{3}x + 16 = 0$$
$$D = \left(13\tfrac{1}{3}\right)^2 - 4 \cdot 2\tfrac{7}{9} \cdot 16 = 0$$

De cirkel raakt dus de lijn l.

c De lijn n staat loodrecht op k.
$\text{rc}_k = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_n = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} n\colon y = -2x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 6 + b = 5 \\ -12 + b = 5 \\ b = 17 \end{array}$$

Dus n: $y = -2x + 17$.
n snijden met k geeft het punt B.

$$\tfrac{1}{2}x = -2x + 17$$
$$x = -4x + 34$$
$$5x = 34$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 6\frac{4}{5} \\ y = \frac{1}{2}x \end{array}\right\} y = 3\tfrac{2}{5}$$

Dus $B\left(6\frac{4}{5}, 3\frac{2}{5}\right)$.

$$d(P, k) = d(P, B) = \sqrt{\left(6 - 6\tfrac{4}{5}\right)^2 + \left(5 - 3\tfrac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{16}{25} + 2\tfrac{14}{25}} = \sqrt{3\tfrac{1}{5}} = 1{,}78\ldots$$

De lijn p staat loodrecht op l.
$\text{rc}_l = 1\frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_p = -\frac{3}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} p\colon y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } P(6, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 6 + b = 5 \\ -4\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 9\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus p: $y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$.
p snijden met l geeft het punt C.

$$1\tfrac{1}{3}x = -\tfrac{3}{4}x + 9\tfrac{1}{2}$$
$$16x = -9x + 114$$
$$25x = 114$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 4\frac{14}{25} \\ y = 1\frac{1}{3}x \end{array}\right\} y = 6\tfrac{2}{25}$$

Dus $C\left(4\frac{14}{25}, 6\frac{2}{25}\right)$.

$$d(P, l) = d(P, C) = \sqrt{\left(6 - 4\tfrac{14}{25}\right)^2 + \left(5 - 6\tfrac{2}{25}\right)^2} = \sqrt{2\tfrac{46}{625} + 1\tfrac{104}{625}} = \sqrt{3\tfrac{6}{25}} = 1\tfrac{4}{5} = 1{,}8$$

$$d(P, M) = \sqrt{(6-4)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$d(P, c_1) = \sqrt{13} - 2 = 1{,}60\ldots$$

Dus $d(P, c_1)$ is de kortste.

d $y = 1\frac{1}{3}x$ substitueren in $x^2 + y^2 + 2x - 14y + 25 = 0$ geeft $x^2 + \left(1\frac{1}{3}x\right)^2 + 2x - 14 \cdot 1\frac{1}{3}x + 25 = 0$

$$x^2 + 1\tfrac{7}{9}x^2 + 2x - 18\tfrac{2}{3}x + 25 = 0$$
$$2\tfrac{7}{9}x^2 - 16\tfrac{2}{3}x + 25 = 0$$
$$D = \left(-16\tfrac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot 2\tfrac{7}{9} \cdot 25 = 0$$

$D = 0$, dus l is raaklijn van c_2.

e $d(c_1, c_2) = d(M, N) - r_1 - r_2 = \sqrt{(-1-4)^2 + (7-2)^2} - 5 - 2 = 5\sqrt{2} - 7$

10

57 **a** $M(4,4)$ en $r = 4$ geeft c_1: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$
$N(1,4)$ en $r = 1$ geeft c_2: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 1$

b Stel $T(p, 2)$.
$MT = 4 + 2$ geeft $\sqrt{(p-4)^2 + (2-4)^2} = 6$
$(p-4)^2 + (2-4)^2 = 36$
$(p-4)^2 + 4 = 36$
$(p-4)^2 = 32$
$p - 4 = 4\sqrt{2} \vee p - 4 = -4\sqrt{2}$
$p = 4 + 4\sqrt{2} \vee p = 4 - 4\sqrt{2}$
vold. vold. niet
Dus $x_T = 4 + 4\sqrt{2}$.

c $d(c_2, c_3) = d(N, T) - 1 - 2 = \sqrt{(4 + 4\sqrt{2} - 1)^2 + (2-4)^2} - 3 = \sqrt{(3 + 4\sqrt{2})^2 + 4} - 3 \approx 5{,}885$

58 $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 10 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 10 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + (y-2)^2 - 4 + 10 = 0$
$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$
Dus $M(4, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.
De lijn l staat loodrecht op k en gaat door M.
$\left.\begin{array}{l} 3x - y = c \\ \text{door } M(4,2) \end{array}\right\} c = 3 \cdot 4 - 2 = 10$
Dus l: $3x - y = 10$.
k snijden met l geeft het punt S.

$\left\{\begin{array}{l} x + 3y = -10 \\ 3x - y = 10 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} x + 3y = -10 \\ 9x - 3y = 30 \end{array}\right.$ +
$10x = 20$
$\left.\begin{array}{l} x = 2 \\ x + 3y = -10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 + 3y = -10 \\ 3y = -12 \\ y = -4 \end{array}$

Dus $S(2, -4)$.
$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4-2)^2 + (2 - -4)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d(k, c) = d(M, k) - r = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

Bladzijde 88

59 **a** $ON = OM + MA + AN = \sqrt{2} + 1 + r_2$

$BN = \dfrac{ON}{\sqrt{2}}$ geeft $r_2 = \dfrac{\sqrt{2} + 1 + r_2}{\sqrt{2}}$

$r_2\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 + r_2$
$r_2\sqrt{2} - r = \sqrt{2} + 1$
$r_2(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} + 1$
$r_2 = \dfrac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$

b $OB = r_2 = 5.828...$
De stelling van Pythagoras in $\triangle OBT$ geeft $OT^2 = OB^2 + BT^2$
$OT^2 = 5{,}828...^2 + 2^2$
$OT^2 = 37{,}970...$
$OT = 6{,}162...$
$d(O, c_3) = OT - 2 \approx 4{,}16$

c $M(1, 1)$ en $T(5{,}828...; 2)$ geeft $d(M, T) = \sqrt{(5{,}828... - 1)^2 + (2-1)^2} = 4{,}930...$
$d(c_1, c_3) = d(M, T) - 1 - 2 = 4{,}930... - 3 \approx 1{,}93$

© Noordhoff Uitgevers bv

60 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 2y + 9 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + 9 = 0$
$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$
Dus $M(3, 1)$.
$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$
$x^2 - 12x + y^2 - 4y + 36 = 0$
$(x-6)^2 - 36 + (y-2)^2 - 4 + 36 = 0$
$(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$
Dus $N(6, 2)$.

$$\text{rc}_k = \frac{2-1}{6-3} = \tfrac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = \tfrac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(3,1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{1}{3}\cdot 3 + b = 1 \\ 1 + b = 1 \\ b = 0 \end{array}$$

Dus $k\colon y = \tfrac{1}{3}x$.

b $y = \tfrac{3}{4}x$ substitueren in $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ geeft $x^2 + \left(\tfrac{3}{4}x\right)^2 - 6x - 2\cdot\tfrac{3}{4}x + 9 = 0$

$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 - 6x - 1\tfrac{1}{2}x + 9 = 0$$
$$1\tfrac{9}{16}x^2 - 7\tfrac{1}{2}x + 9 = 0$$
$$D = \left(-7\tfrac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot 1\tfrac{9}{16}\cdot 9 = 0$$

$D = 0$, dus l is raaklijn van c_1.

$y = \tfrac{3}{4}x$ substitueren in $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$ geeft $x^2 + \left(\tfrac{3}{4}x\right)^2 - 12x - 4\cdot\tfrac{3}{4}x + 36 = 0$

$$x^2 + \tfrac{9}{16}x^2 - 12x - 3x + 36 = 0$$
$$1\tfrac{9}{16}x^2 - 15x + 36 = 0$$
$$D = (-15)^2 - 4\cdot 1\tfrac{9}{16}\cdot 36 = 0$$

$D = 0$, dus l is raaklijn van c_2.

c $d(c_1, c_2) = d(M, N) - 1 - 2 = \sqrt{(6-3)^2 + (2-1)^2} - 3 = \sqrt{9+1} - 3 = \sqrt{10} - 3$

d $d(P, c_1) = d(P, M) - 1 = \sqrt{(3-2)^2 + (1-5)^2} - 1 = \sqrt{1+16} - 1 = \sqrt{17} - 1 = 3{,}12...$

$d(P, c_2) = d(P, N) - 2 = \sqrt{(6-2)^2 + (2-5)^2} - 2 = \sqrt{16+9} - 2 = 5 - 2 = 3$
Dus P ligt dichter bij c_2.

e De lijn n door P loodrecht op l heeft richtingscoëfficiënt $-1\tfrac{1}{3}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1\tfrac{1}{3}x + b \\ \text{door } P(2,5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\tfrac{1}{3}\cdot 2 + b = 5 \\ -2\tfrac{2}{3} + b = 5 \\ b = 7\tfrac{2}{3} \end{array}$$

Dus $n\colon y = -1\tfrac{1}{3}x + 7\tfrac{2}{3}$.
n snijden met l geeft het snijpunt T.
$\tfrac{3}{4}x = -1\tfrac{1}{3}x + 7\tfrac{2}{3}$
$9x = -16x + 92$
$25x = 92$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3\tfrac{17}{25} \\ y = \tfrac{3}{4}x \end{array}\right\} y = \tfrac{3}{4}\cdot 3\tfrac{17}{25} = 2\tfrac{19}{25}$$

Dus $T\left(3\tfrac{17}{25}, 2\tfrac{19}{25}\right)$.

$$d(P, T) = \sqrt{\left(3\tfrac{17}{25} - 2\right)^2 + \left(2\tfrac{19}{25} - 5\right)^2} = \sqrt{2\tfrac{514}{625} + 5\tfrac{11}{625}} = \sqrt{7\tfrac{21}{25}} = 2\tfrac{4}{5}$$

De straal van c_3 is gelijk aan $d(P, T) = 2\tfrac{4}{5}$.

Dus $c_3\colon (x-2)^2 + (y-5)^2 = \left(2\tfrac{4}{5}\right)^2$ ofwel $c_3\colon (x-2)^2 + (y-5)^2 = 7\tfrac{21}{25}$.

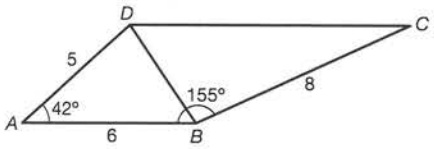
© Noordhoff Uitgevers bv

Diagnostische toets

Bladzijde 90

1 $AE = 4 - 1 = 3$
De stelling van Pythagoras in $\triangle AED$ geeft $DE = 5$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle CDE$ geeft $5 \times CF = 4 \times 4$, dus $CF = 3\frac{1}{5}$.

2 Teken BD.



De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD)$
$BD^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cos(42°) = 16{,}41...$
$BD = \sqrt{16{,}41...} = 4{,}05...$
De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\angle ABD)$
$5^2 = 6^2 + 16{,}41... - 2 \cdot 6 \cdot 4{,}05... \cdot \cos(\angle ABD)$
$48{,}61... \cdot \cos(\angle ABD) = 27{,}41...$
$\cos(\angle ABD) = 0{,}563...$
$\angle ABD = 55{,}67...°$
$\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 155° - 55{,}67...° = 99{,}32...°$
De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos(\angle CBD)$
$CD^2 = 8^2 + 16{,}41... - 2 \cdot 8 \cdot 4{,}05... \cdot \cos(99{,}32...°)$
$CD^2 = 90{,}91...$
$CD = 9{,}53...$
Dus $CD \approx 9{,}5$.

3 Stel $BF = x$.
Dan is $AF = x\sqrt{3}$, $AB = 2x$, $CF = x$ en $BC = x\sqrt{2}$
$AE = DE = CD = AF + CF = x\sqrt{3} + x$
omtrek = 5 geeft $AB + BC + CD + DE + AE = 5$
$2x + x\sqrt{2} + x\sqrt{3} + x + x\sqrt{3} + x + x\sqrt{3} + x = 5$
$5x + x\sqrt{2} + 3x\sqrt{3} = 5$
$x(5 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3}) = 5$
$x = \dfrac{5}{5 + \sqrt{2} + 3\sqrt{3}} = 0{,}430...$
$AE = x\sqrt{3} + x = 1{,}176...$
Dus $AE \approx 1{,}18$.

4 Stel $AB = x$, dan is $AC = 2\frac{1}{2}x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $BC^2 = AC^2 - AB^2 = 6\frac{1}{4}x^2 - x^2 = 5\frac{1}{4}x^2$, dus $BC = x\sqrt{5\frac{1}{4}}$.
$O(ABCD) = \sqrt{21}$ geeft $AB \cdot BC = \sqrt{21}$
$x \cdot x\sqrt{5\frac{1}{4}} = \sqrt{21}$
$x^2\sqrt{\frac{21}{4}} = \sqrt{21}$
$x^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{21} = \sqrt{21}$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2}$
Dus de straal is $1\frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Bladzijde 91

5 **a** k: $y = ax - 4$ ofwel k: $ax - y = 4$
k en l: $3x - 2y = 6$ hebben een snijpunt als $\dfrac{a}{3} \neq \dfrac{-1}{-2}$, dus $a \neq 1\frac{1}{2}$.
b mag elke waarde hebben.

b $\left.\begin{array}{l} y = ax - 4 \\ \text{door } (8, 28) \end{array}\right\}$ $8a - 4 = 28$
$8a = 32$
$a = 4$
$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = b \\ \text{door } (8, 28) \end{array}\right\}$ $b = 3 \cdot 8 - 2 \cdot 28 = -32$
Dus $a = 4$ en $b = -32$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c k snijdt de y-as in $(0, -4)$.

$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y = b \\ \text{door } (0, -4) \end{array}\right\}\ b = 3 \cdot 0 - 2 \cdot -4 = 8$

Dus $b = 8$ en a mag elke waarde hebben.

d $y = 2x - 4$ substitueren in $3x - 2y = b$ geeft $3x - 2(2x - 4) = b$

$$3x - 4x + 8 = b$$
$$-x = b - 8$$
$$x = 8 - b$$

Het snijpunt ligt rechts van de y-as als $8 - b > 0$ ofwel $b < 8$.

6 **a** $\text{rc}_{OC} = \frac{4}{4} = 1$, dus $\alpha = 45°$.

$\text{rc}_{OA} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$, dus $\beta = -26{,}56...°$.

$\angle AOC = \alpha - \beta = 45° - -26{,}56...° \approx 71{,}6°$

b De lijn k gaat door B en staat loodrecht op OC, dus $\text{rc}_k = -1$.

$\left.\begin{array}{l} y = -x + b \\ \text{door } B(6, 0) \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} -6 + b = 0 \\ b = 6 \end{array}$

Dus k: $y = -x + 6$.

k snijden met OC: $y = x$ geeft het punt $S(3, 3)$.

$d(B, OC) = d(B, S) = \sqrt{(6-3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

c $\text{rc}_{OC} = \frac{4}{4} = 1$, dus $\alpha = 45°$.

$\text{rc}_{AC} = \frac{4 - -1}{4 - 2} = 2\frac{1}{2}$, dus $\beta = 68{,}19...°$.

$\text{rc}_{BC} = \frac{0 - 4}{6 - 4} = -2$, dus $\gamma = -63{,}43...°$.

$\angle ACO = \beta - \alpha = 68{,}19...° - 45° \approx 23{,}19...°$

$\beta - \gamma = 68{,}19...° - -63{,}43...° = 131{,}63...°$

$\angle ACB = 180° - 131{,}63...° = 48{,}36...°$

$\angle ACB - \angle ACO = 48{,}36...° - 23{,}19...° = 25{,}16...° > 25°$

Dus Maud heeft gelijk.

7 **a** De lijn m gaat door A en staat loodrecht op k, dus $4x - 3y = c$.

$\left.\begin{array}{l} 4x - 3y = c \\ \text{door } A(2, 14) \end{array}\right\}\ c = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 14 = -34$

Dus m: $4x - 3y = -34$.

m snijden met k geeft $\left\{\begin{array}{l} 4x - 3y = -34 \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 16x - 12y = -136 \\ 9x + 12y = 36 \end{array}\right.$ +

$25x = -100$

$\left.\begin{array}{l} x = -4 \\ 3x + 4y = 12 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l} -12 + 4y = 12 \\ 4y = 24 \\ y = 6 \end{array}$

Dus het snijpunt is $S(-4, 6)$.

$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(2 - -4)^2 + (14 - 6)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$

b $3x + 4y = 12$

$4y = -3x + 12$

$y = -\frac{3}{4}x + 3$

$\text{rc}_k = -\frac{3}{4}$ geeft $\tan(\alpha) = -\frac{3}{4}$, dus $\alpha = -36{,}86...°$

$x + 2y = 6$

$2y = -x + 6$

$y = -\frac{1}{2}x + 3$

$\text{rc}_l = -\frac{1}{2}$ geeft $\tan(\beta) = -\frac{1}{2}$, dus $\beta = -26{,}56...°$

$\beta - \alpha = -26{,}56...° - -36{,}86...° = 10{,}30...°$

Dus $\angle(k, l) \approx 10{,}3°$.

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** c_1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 4 = 0$
$(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 4 = 0$
$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$
Dus $M(2, -3)$ en straal = 3.
$d(A, M) = \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - -3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} < 3$
Dus A ligt binnen c_1.

b $y = -x + 3$ snijden met c geeft $x^2 + (-x + 3)^2 - 4x + 6(-x + 3) + 4 = 0$
$x^2 + x^2 - 6x - 4x - 6x + 18 + 4 = 0$
$2x^2 - 16x + 22 = 0$
$x^2 - 8x + 11 = 0$
$D = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 64 - 44 = 20 \neq 0$
Dus k raakt c niet.

c Het midden van AM is $N(3, -2)$ en $AM = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ geeft $r = \sqrt{2}$.
Dus c_2: $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 2$.

9 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 15 = 0$
$(x - 3)^2 - 9 + (y - 4)^2 - 16 + 15 = 0$
$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 10$
Dus $M(3, 4)$.
$\text{rc}_{MA} = \dfrac{1 - 4}{4 - 3} = -3$
De lijn k staat loodrecht op MA, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{3}$.
$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A(4, 1) \end{array}\right\}$ $\frac{1}{3} \cdot 4 + b = 1$
$1\frac{1}{3} + b = 1$
$b = -\frac{1}{3}$
Dus k: $y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$.

b l en c snijden geeft
$\left.\begin{array}{l} y = 3x + b \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0 \end{array}\right\}$ $x^2 + (3x + b)^2 - 6x - 8(3x + b) + 15 = 0$
$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 6x - 24x - 8b + 15 = 0$
$10x^2 + (6b - 30)x + b^2 - 8b + 15 = 0$
voor raken geldt $D = 0$
$(6b - 30)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 8b + 15) = 0$
$36b^2 - 360b + 900 - 40b^2 + 320b - 600 = 0$
$-4b^2 - 40b + 300 = 0$
$b^2 + 10b - 75 = 0$
$(b - 5)(b + 15) = 0$
$b = 5 \vee b = -15$

10

10 **a** c_1: $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$
$x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 0$
$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Dus c_1 heeft middelpunt $M(-2, 1)$ en straal $\sqrt{5}$.
c_2: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0$
$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 20 = 0$
$(x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 20 = 0$
$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 5$
Dus c_2 heeft middelpunt $N(4, 3)$ en straal $\sqrt{5}$.
$d(M, N) = \sqrt{(4 - -2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$
$d(c_1, c_2) = d(M, N) - \sqrt{5} - \sqrt{5} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

b Stel k: $y = ax + b$ met $a = \frac{1-7}{8--4} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(-4, 7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -4 + b = 7 \\ 2 + b = 7 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + 5$.

De lijn l door $M(-2, 1)$ die loodrecht staat op k heeft $\text{rc}_l = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } M(-2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -2 + b = 1 \\ -4 + b = 1 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus l: $y = 2x + 5$.

k en l snijden geeft $-\frac{1}{2}x + 5 = 2x + 5$

$$\begin{array}{l} -2\frac{1}{2}x = 0 \\ \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x + 5 \end{array}\right\} y = 5 \end{array}$$

Dus het snijpunt is $S(0, 5)$.

$d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(0 - -2)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Dus $d(k, c_1) = d(M, k) - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$.

c $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ x^2 + y^2 - 8x - 6y + 20 = 0 \end{cases}$

$x^2 + \left(-\frac{1}{2}x + 5\right)^2 - 8x - 6\left(-\frac{1}{2}x + 5\right) + 20 = 0$

$x^2 + \frac{1}{4}x^2 - 5x + 25 - 8x + 3x - 30 + 20 = 0$

$1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 15 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 2 \vee x = 6$

$x = 2$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 5 = 4$

$x = 6$ geeft $y = -\frac{1}{2} \cdot 6 + 5 = 2$

Dus de snijpunten van k en c_2 zijn $(2, 4)$ en $(6, 2)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11 Verbanden en functies

Voorkennis Stelsels, formules en de afgeleide

Bladzijde 94

1 **a** $\begin{cases} 5x - 6y = 19 \\ 7x + 4y = 8 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases} 10x - 12y = 38 \\ 21x + 12y = 24 \end{cases}$ +

$31x \quad = 62$

$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ 7x + 4y = 8 \end{matrix}\right\}$ $7 \cdot 2 + 4y = 8$

$14 + 4y = 8$

$4y = -6$

$y = -1\frac{1}{2}$

De oplossing is $(x, y) = (2, -1\frac{1}{2})$.

b $\begin{cases} 2\frac{1}{2}x + 3y = 6 \\ x + 8y = 33 \end{cases} \left|\begin{matrix} 2 \\ 5 \end{matrix}\right|$ geeft $\begin{cases} 5x + 6y = 12 \\ 5x + 40y = 165 \end{cases}$ −

$-34y = -153$

$\left.\begin{matrix} y = 4\frac{1}{2} \\ x + 8y = 33 \end{matrix}\right\}$ $x + 8 \cdot 4\frac{1}{2} = 33$

$x + 36 = 33$

$x = -3$

De oplossing is $(x, y) = (-3, 4\frac{1}{2})$.

c Substitutie van $y = \frac{2}{3}x - 5$ in $4x - 1\frac{1}{2}y = 17\frac{1}{2}$ geeft $4x - 1\frac{1}{2}(\frac{2}{3}x - 5) = 17\frac{1}{2}$

$4x - x + 7\frac{1}{2} = 17\frac{1}{2}$

$3x = 10$

$\left.\begin{matrix} x = 3\frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3}x - 5 \end{matrix}\right\}$ $y = \frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3} - 5 = -2\frac{7}{9}$

De oplossing is $(x, y) = (3\frac{1}{3}, -2\frac{7}{9})$.

d Substitutie van $2x = 5 - y$ in $4x - 3y = 30$ geeft $2(5 - y) - 3y = 30$

$10 - 2y - 3y = 30$

$-5y = 20$

$\left.\begin{matrix} y = -4 \\ 2x = 5 - y \end{matrix}\right\}$ $2x = 5 - -4$

$2x = 9$

$x = 4\frac{1}{2}$

De oplossing is $(x, y) = (4\frac{1}{2}, -4)$.

Bladzijde 96

2 **a** De top is $(1, -4)$, dus $y = a(x - 1)^2 - 4$.
Door $(3, 10)$, dus $a(3 - 1)^2 - 4 = 10$

$4a = 14$

$a = 3\frac{1}{2}$

Je krijgt $y = 3\frac{1}{2}(x - 1)^2 - 4$

$y = 3\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 4$

$y = 3\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3\frac{1}{2} - 4$

$y = 3\frac{1}{2}x^2 - 7x - \frac{1}{2}$

De formule is $y = 3\frac{1}{2}x^2 - 7x - \frac{1}{2}$.

b Snijpunten met de x-as zijn $(-4, 0)$ en $(5, 0)$, dus $y = a(x + 4)(x - 5)$.
Door $(1, 4)$, dus $a(1 + 4)(1 - 5) = 4$

$-20a = 4$

$a = -\frac{1}{5}$

Je krijgt $y = -\frac{1}{5}(x + 4)(x - 5)$

$y = -\frac{1}{5}(x^2 - x - 20)$

$y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + 4$

De formule is $y = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $\frac{1}{3}x^2 - x - 6 = 0$
$x^2 - 3x - 18 = 0$
$(x + 3)(x - 6) = 0$
$x = -3 \vee x = 6$
De nulpunten zijn -3 en 6.
$x_{top} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1\frac{1}{2}$
$y_{top} = \frac{1}{3} \cdot (1\frac{1}{2})^2 - 1\frac{1}{2} - 6 = -6\frac{3}{4}$
De top is $(1\frac{1}{2}, -6\frac{3}{4})$.

Bladzijde 97

3 p_1: De top is (-2, -1), dus $y = a(x + 2)^2 - 1$.
Door (3, 4), dus $a(3 + 2)^2 - 1 = 4$
$25a = 5$
$a = \frac{1}{5}$
Je krijgt $y = \frac{1}{5}(x + 2)^2 + 1$
$y = \frac{1}{5}(x^2 + 4x + 4) + 1$
$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + \frac{4}{5} + 1$
$y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$
De formule is $y = \frac{1}{5}x^2 + \frac{4}{5}x + 1\frac{4}{5}$.
p_2: Snijpunten met de x-as zijn (1, 0) en (4, 0), dus $y = a(x - 1)(x - 4)$.
Door (0, -3), dus $a(0 - 1)(0 - 4) = -3$
$4a = -3$
$a = -\frac{3}{4}$
Je krijgt $y = -\frac{3}{4}(x - 1)(x - 4)$
$y = -\frac{3}{4}(x^2 - 5x + 4)$
$y = -\frac{3}{4}x^2 + 3\frac{3}{4}x - 3$
De formule is $y = -\frac{3}{4}x^2 + 3\frac{3}{4}x - 3$.

4 **a** $\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 - 4x + c \\ \text{door } (6, 0) \end{array}\right\}$ $2 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6 + c = 0$
$72 - 24 + c = 0$
$c = -48$
De formule is $y = 2x^2 - 4x - 48$.
$x_{top} = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{4} = 1$
$y_{top} = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 48 = -50$
Dus de top is (1, -50).
b $\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 9x + 24 \\ \text{door } (2, 36) \end{array}\right\}$ $a \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 + 24 = 36$
$4a = -6$
$a = -1\frac{1}{2}$
De formule is $y = -1\frac{1}{2}x^2 + 9x + 24$.
$-1\frac{1}{2}x^2 + 9x + 24 = 0$
$x^2 - 6x - 16 = 0$
$(x + 2)(x - 8) = 0$
$x = -2 \vee x = 8$
De coördinaten zijn (-2, 0) en (8, 0).

Bladzijde 99

5 **a** $f(x) = 5(4x - 1)^3$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot 5(4x - 1)^2 = 60(4x - 1)^2$
b $f(x) = 4x^3 + \frac{7}{2x^3} = 4x^3 + 3\frac{1}{2}x^{-3}$ geeft $f'(x) = 12x^2 - 10\frac{1}{2}x^{-4} = 12x^2 - \frac{21}{2x^4}$
c $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x\sqrt{x}} = \frac{x^4 - 3}{x^{1\frac{1}{2}}} = x^{2\frac{1}{2}} - 3x^{-1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} + 4\frac{1}{2}x^{-2\frac{1}{2}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{9}{2x^{2\frac{1}{2}}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + \frac{9}{2x^2\sqrt{x}}$
d $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3\sqrt{4x + 1}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{2}x - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x + 1}} = \frac{1}{2}x - \frac{6}{\sqrt{4x + 1}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

e $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3x^2 \cdot x^{\frac{1}{3}} - \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = 3x^{2\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$ geeft

$f'(x) = 7x^{1\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-1\frac{1}{3}} = 7x \cdot x^{\frac{1}{3}} + \dfrac{1}{3x^{1\frac{1}{3}}} = 7x \cdot \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{x}}$

f $f(x) = (x^2 + 1)(x\sqrt{x} - 1) = x^3 \cdot \sqrt{x} - x^2 + x\sqrt{x} - 1 = x^{3\frac{1}{2}} - x^2 + x^{1\frac{1}{2}} - 1$ geeft

$f'(x) = 3\frac{1}{2}x^{2\frac{1}{2}} - 2x + 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3\frac{1}{2}x^2 \cdot \sqrt{x} - 2x + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

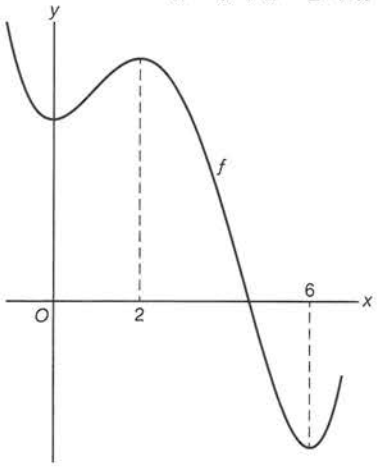
6 **a** $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 + 20$ geeft $f'(x) = x^3 - 8x^2 + 12x$

$f'(x) = 0$ geeft $x^3 - 8x^2 + 12x = 0$

$x(x^2 - 8x + 12) = 0$

$x(x - 2)(x - 6) = 0$

$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 6$



min. is $f(0) = 20$

max. is $f(2) = 26\frac{2}{3}$

min. is $f(6) = -16$

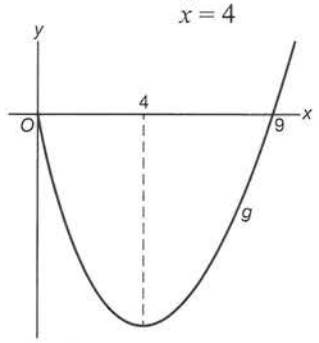
b $g(x) = 4x\sqrt{x} - 12x = 4x^{1\frac{1}{2}} - 12x$ geeft $g'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 12 = 6\sqrt{x} - 12$

$g'(x) = 0$ geeft $6\sqrt{x} - 12 = 0$

$6\sqrt{x} = 12$

$\sqrt{x} = 2$

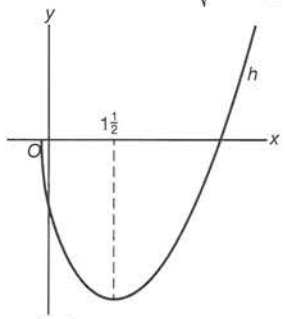
$x = 4$



min. is $g(4) = -16$

c $h(x) = x^2 - \sqrt{60x + 10}$ geeft $h'(x) = 2x - 60 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{60x + 10}} = 2x - \dfrac{30}{\sqrt{60x + 10}}$

$h'(1\frac{1}{2}) = 2 \cdot 1\frac{1}{2} - \dfrac{30}{\sqrt{60 \cdot 1\frac{1}{2} + 10}} = 3 - \dfrac{30}{\sqrt{100}} = 3 - \dfrac{30}{10} = 3 - 3 = 0$



$h'(1\frac{1}{2}) = 0$ en in de schets is te zien dat de grafiek een top heeft voor $x = 1\frac{1}{2}$.
Dus h heeft een extreme waarde voor $x = 1\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11.1 Stelsels bij parabolen en meetkundige modellen

Bladzijde 100

1 **a** $\left.\begin{array}{l} y = ax^2 - 6x + c \\ \text{door } (1, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + c = -1 \\ a - 6 + c = -1 \end{array}$

b $\left.\begin{array}{l} y = ax^2 - 6x + c \\ \text{door } (4, 11) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 4^2 - 6 \cdot 4 + c = 11 \\ 16a - 24 + c = 11 \end{array}$

2 **a** $\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + c \\ \text{door } (1, 8) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 1^2 + c = 8 \\ a + c = 8 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + c \\ \text{door } (2, 17) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 2^2 + c = 17 \\ 4a + c = 17 \end{array}$

$\begin{cases} a + c = 8 \\ 4a + c = 17 \end{cases} -$

$-3a = -9$

$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ a + c = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 + c = 8 \\ c = 5 \end{array}$

Dus de formule is $y = 3x^2 + 5$.

Bladzijde 101

3 **a** $\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 + bx + c \\ \text{door } (-1, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot -1 + c = 5 \\ -b + c = 3 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2 + bx + c \\ \text{door } (3, -7) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c = -7 \\ 3b + c = -25 \end{array}$

$\begin{cases} -b + c = 3 \\ 3b + c = -25 \end{cases} -$

$-4b = 28$

$\left.\begin{array}{l} b = -7 \\ -b + c = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 7 + c = 3 \\ c = -4 \end{array}$

Dus $b = -7$ en $c = -4$.

b De formule is $y = 2x^2 - 7x - 4$.

$y = 0$ geeft $2x^2 - 7x - 4 = 0$

$D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -4 = 81$

$x = \frac{7 + 9}{4} = 4 \vee x = \frac{7 - 9}{4} = -\frac{1}{2}$

De snijpunten met de x-as zijn $(4, 0)$ en $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

4 $\left.\begin{array}{l} y = a(x + 1)^2 + q \\ \text{door } (-4, 20) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot (-4 + 1)^2 + q = 20 \\ 9a + q = 20 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = a(x + 1)^2 + q \\ \text{door } \left(\frac{1}{2}, -7\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 + q = -7 \\ 2\frac{1}{4}a + q = -7 \end{array}$

$\begin{cases} 9a + q = 20 \\ 2\frac{1}{4}a + q = -7 \end{cases} -$

$6\frac{3}{4}a = 27$

$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ 9a + q = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 9 \cdot 4 + q = 20 \\ q = -16 \end{array}$

De formule is $y = 4(x + 1)^2 - 16$.

$y = 0$ geeft $4(x + 1)^2 - 16 = 0$

$4(x + 1)^2 = 16$

$(x + 1)^2 = 4$

$x + 1 = 2 \vee x + 1 = -2$

$x = 1 \vee x = -3$

Dus de snijpunten van de parabool met de x-as zijn $(1, 0)$ en $(-3, 0)$.

11

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** $\left.\begin{array}{l} y = x^2 + px + q \\ \text{door } (2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^2 + p \cdot 2 + q = -1 \\ 2p + q = -5 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = 2px - q \\ \text{door } (2, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2p \cdot 2 - q = -1 \\ 4p - q = -1 \end{array}$

$$\begin{cases} 2p + q = -5 \\ 4p - q = -1 \end{cases} +$$
$$\overline{6p = -6}$$

$\left.\begin{array}{l} p = -1 \\ 2p + q = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -1 + q = -5 \\ q = -3 \end{array}$

Dus $p = -1$ en $q = -3$.

b Snijden van $y = x^2 - x - 3$ en $y = -2x + 3$ geeft $x^2 - x - 3 = -2x + 3$

$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$(x - 2)(x + 3) = 0$$
$$x = 2 \vee x = -3$$

$x = -3$ geeft het snijpunt $(-3, 9)$.

6 $\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ \text{door } (0, 4) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 4 \\ c = 4 \end{array}$

$c = 4$ geeft de formule $y = ax^2 + bx + 4$.

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + 4 \\ \text{door } (-2, -10) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot (-2)^2 + b \cdot -2 + 4 = -10 \\ 4a - 2b = -14 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + 4 \\ \text{door } (3, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 4 = 5 \\ 9a + 3b = 1 \end{array}$

$\begin{cases} 4a - 2b = -14 \\ 9a + 3b = 1 \end{cases} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right|$ geeft $\begin{cases} 12a - 6b = -42 \\ 18a + 6b = 2 \end{cases} +$

$$\overline{30a = -40}$$

$\left.\begin{array}{l} a = -1\frac{1}{3} \\ 4a - 2b = -14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 \cdot -1\frac{1}{3} - 2b = -14 \\ -2b = -8\frac{2}{3} \\ b = 4\frac{1}{3} \end{array}$

Dus de formule is $y = -1\frac{1}{3}x^2 + 4\frac{1}{3}x + 4$.

7 **a** $x = 20$ en $h = 0$ invullen in $h = ax^2 + bx$ geeft $a \cdot 20^2 + b \cdot 20 = 0$

$$400a + 20b = 0$$

b $x = \dfrac{0 + 20}{2} = 10$ en $h = 8$ invullen in $h = ax^2 + bx$ geeft $a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 8$

$$100a + 10b = 8$$

c $\begin{array}{l} 400a + 20b = 0 \\ 100a + 10b = 8 \end{array} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ 1 \end{array} \right|$ geeft $\begin{cases} 200a + 10b = 0 \\ 100a + 10b = 8 \end{cases}$

$$\overline{100a = -8}$$

$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}08 \\ 100a + 10b = 8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -8 + 10b = 8 \\ 10b = 16 \\ b = 1{,}6 \end{array}$

Dus $a = -0{,}08$ en $b = 1{,}6$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 102

8 $\left.\begin{array}{l} A = aT^2 + bT + 60\,000 \\ T = 2{,}5 \text{ en } N = 40\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 6{,}25a + 2{,}5b + 60\,000 = 40\,000 \\ 6{,}25a + 2{,}5b = -20\,000 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} A = aT^2 + bT + 60\,000 \\ T = 5 \text{ en } N = 25\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 25a + 5b + 60\,000 = 25\,000 \\ 25a + 5b = -35\,000 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} 6{,}25a + 2{,}5b = -20\,000 \\ 25a + 5b = -35\,000 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 12{,}5a + 5b = -40\,000 \\ \underline{25a + 5b = -35\,000} \; - \end{array}\right.$

$-12{,}5a = -5000$

$\left.\begin{array}{l} a = 400 \\ 25a + 5b = -35\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10\,000 + 5b = -35\,000 \\ 5b = -45\,000 \\ b = -9000 \end{array}$

Dus $a = 400$ en $b = -9000$.

Bladzijde 103

9 $\left.\begin{array}{l} P = at^2 + bt - 2200 \\ t = 20 \text{ en } P = 80 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 400a + 20b - 2200 = 80 \\ 400a + 20b = 2280 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} P = at^2 + bt - 2200 \\ t = 25 \text{ en } P = 89{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 625a + 25b - 2200 = 89{,}5 \\ 625a + 25b = 2289{,}5 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} 400a + 20b = 2280 \\ 625a + 25b = 2289{,}5 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 2000a + 100b = 11\,400 \\ \underline{2500a + 100b = 9158} \; - \end{array}\right.$

$-500a = 2242$

$\left.\begin{array}{l} a = -4{,}484 \\ 400a + 20b = 2280 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1793{,}6 + 20b = 2280 \\ 20b = 4073{,}6 \\ b = 203{,}68 \end{array}$

Dus $a = -4{,}484$ en $b = 203{,}68$.

10 **a** De bal moet over het net, dus $h > 1$ voor $x = 12$.
De bal mag niet uit zijn, dus $h = 0$ voor $x \leq 21$.

b $\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx + 2{,}4 \\ h = 1{,}104 \text{ en } x = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + 2{,}4 = 1{,}104 \\ 144a + 12b = -1{,}296 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx + 2{,}4 \\ h = 0 \text{ en } x = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 2{,}4 = 0 \\ 400a + 20b = -2{,}4 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} 144a + 12b = -1{,}296 \\ 400a + 20b = -2{,}4 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 5 \\ 3 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 720a + 60b = -6{,}48 \\ \underline{1200a + 60b = -7{,}2} \; - \end{array}\right.$

$-480a = 0{,}72$

$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}0015 \\ 144a + 12b = -1{,}296 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}216 + 12b = -1{,}296 \\ 12b = -1{,}08 \\ b = -0{,}09 \end{array}$

Dus $a = -0{,}0015$ en $b = -0{,}09$.

11 $\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx \\ h = 3 \text{ en } x = 5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 3 \\ 25a + 5b = 3 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx \\ h = 0 \text{ en } x = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 20^2 + b \cdot 20 = 0 \\ 400a + 20b = 0 \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} 25a + 5b = 3 \\ 625a + 25b = 0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{5} \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} 25a + 5b = 3 \\ \underline{125a + 5b = 0} \; - \end{array}\right.$

$-100a = 3$

$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}03 \\ 25a + 5b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}75 + 5b = 3 \\ 5b = 3{,}75 \\ b = 0{,}75 \end{array}$

Dus $h = -0{,}03x^2 + 0{,}75x$.
Voer in $y_1 = -0{,}03x^2 + 0{,}75x$.
De optie maximum geeft $x = 12{,}5$ en $y = 4{,}6875$.
Dus de maximale hoogte is 469 cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 **a** $\left.\begin{array}{l} x = at^2 + b \\ t = 3 \text{ en } x = 25{,}4 \end{array}\right\} 9a + b = 25{,}4$

$\left.\begin{array}{l} x = at^2 + b \\ t = 5 \text{ en } x = 35{,}0 \end{array}\right\} 25a + b = 35{,}0$

$\begin{cases} 9a + b = 25{,}4 \\ 25a + b = 35 \end{cases} -$

$-16a = -9{,}6$

$\left.\begin{array}{l} a = 0{,}6 \\ 25a + b = 35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 15 + b = 35 \\ b = 20 \end{array}$

Dus $a = 0{,}6$ en $b = 20$.

b $t = 0$ geeft $x = 20$, dus het karretje is 20 cm van de rand losgelaten.

c $x = 80$ geeft $0{,}6t^2 + 20 = 80$

$0{,}6t^2 = 60$

$t^2 = 100$

$t = 10$

$x = 0{,}6t^2 + 20$ geeft $v = 1{,}2t$

$t = 10$ geeft $v = 12$

Dus het karretje bereikt de rand met een snelheid van 12 cm/s.

Bladzijde 104

13 **a** $\left.\begin{array}{l} h = a(t - p)^2 \\ t = 200 \text{ en } h = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a(200 - p)^2 = 0 \\ (200 - p)^2 = 0 \\ 200 - p = 0 \\ p = 200 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} h = a(t - 200)^2 \\ t = 0 \text{ en } h = 50 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot (-200)^2 = 50 \\ 40\,000a = 50 \\ a = 0{,}00125 \end{array}$

b $h = 32$ geeft $0{,}00125(t - 200)^2 = 32$

$(t - 200)^2 = 25\,600$

$t - 200 = 160 \vee t - 200 = -160$

$t = 360 \vee t = 40$

vold. niet vold.

$h = 0{,}00125(t - 200)^2$ geeft $h' = 0{,}0025(t - 200)$

$t = 40$ geeft $h' = 0{,}0025(40 - 200) = -0{,}4$

Dus het water daalt met een snelheid van 0,4 cm/s.

14 **a** $\left.\begin{array}{l} P = at^3 + bt^2 + 50t + 75 \\ t = \frac{1}{2} \text{ en } P = 93 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + 25 + 75 = 93 \\ \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b = -7 \\ a + 2b = -56 \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} P = at^3 + bt^2 + 50t + 75 \\ t = 2 \text{ en } P = 87 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8a + 4b + 100 + 75 = 87 \\ 8a + 4b = -88 \end{array}$

$\begin{cases} a + 2b = -56 \\ 8a + 4b = -88 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{2} \end{array}\right| \begin{cases} a + 2b = -56 \\ 4a + 2b = -44 \end{cases} -$

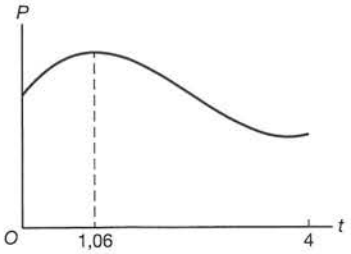
$-3a = -12$

$\left.\begin{array}{l} a = 4 \\ a + 2b = -56 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 + 2b = -56 \\ 2b = -60 \\ b = -30 \end{array}$

Dus $a = 4$ en $b = -30$.

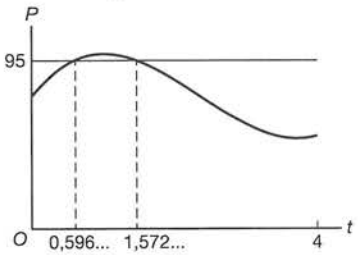
© Noordhoff Uitgevers bv

b Voer in $y_1 = 4x^3 - 30x^2 + 50x + 75$.
De optie maximum geeft $x = 1{,}056...$ en $y = 99{,}056...$



P is maximaal voor $t = 1{,}0566...$
Dus de productiviteit is maximaal na $1{,}0566... \cdot 60 \approx 63$ minuten.

c Voer in $y_2 = 95$.
Intersect geeft $x = 0{,}596...$ en $x = 1{,}572...$



De productiviteit is gedurende $(1{,}572... - 0{,}596...) \cdot 60 \approx 59$ minuten hoger dan 95%.

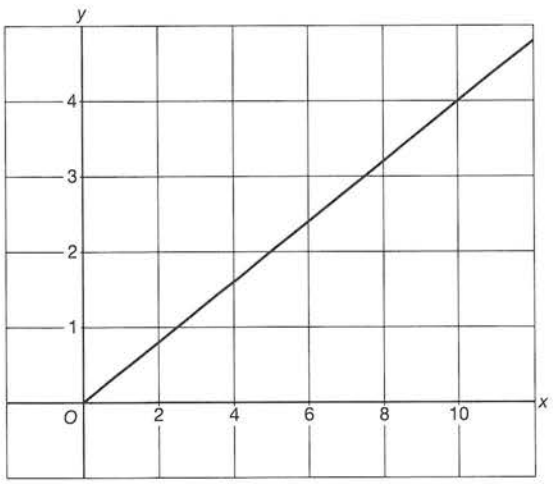
d Voer in $y_2 = 70$.
Intersect geeft $x = 2{,}701...$
$x = 2{,}701...$ geeft met de optie $\frac{dy}{dx}$ dat $P' = -24{,}513...$
Dus de productiviteit neemt af met een snelheid van 24,5% per uur.

11.2 Evenredig en omgekeerd evenredig

Bladzijde 106

15 **a** Als je x met een getal vermenigvuldigt, moet je y met datzelfde getal vermenigvuldigen.

b



De grafiek is een rechte lijn door de oorsprong.

c De formule is $y = 0{,}4x$.

Bladzijde 107

16 **a** $\begin{array}{c|c} 15 & 60 \\ \hline 23 & y \end{array}$ dus $y = \frac{23 \cdot 60}{15} = 92$.

b $\begin{array}{c|c} 6 & x \\ \hline 3{,}6 & 30{,}6 \end{array}$ dus $x = \frac{6 \cdot 30{,}6}{3{,}6} = 51$.

© Noordhoff Uitgevers bv

17 **a** W is evenredig met S,
dus $W = aS$
$S = 50$ en $W = 5{,}6$ $\Big\}$ $50a = 5{,}6$
$a = 0{,}112$
Dus $W = 0{,}112S$.
b $S = 80$ geeft $W = 0{,}112 \cdot 80 = 8{,}96$
Dus ongeveer 9 cm.

18 **a** Q is evenredig met A, dus $Q = aA$
Bij $A = 3$ hoort $Q = 1{,}2$. $\Big\}$ $a \cdot 3 = 1{,}2$
$3a = 1{,}2$
$a = \frac{1{,}2}{3} = 0{,}4$
Dus $Q = 0{,}4A$.
b Totale glasoppervlakte $= \frac{1{,}8}{0{,}12} = 15$ m^2.
$A = 15$ geeft $Q = 0{,}4 \cdot 15 = 6$
Er gaat per uur 6 MJ verloren.
Dus per dag gaat er $24 \cdot 6 = 144$ MJ verloren.

Bladzijde 108

19 I Deze bewering is waar, $N = at$ is een lineair verband.
II Deze bewering is niet waar, voor $b \neq 0$ is $N = at + b$ niet evenredig met t.

20 **a** Bij I wordt y vier keer zo klein.
Bij II wordt y vier keer zo groot.
b Bij situatie II is sprake van evenredige grootheden.

Bladzijde 110

21 **a** recht evenredig
b omgekeerd evenredig
c omgekeerd evenredig
d recht evenredig
e omgekeerd evenredig

22 **a** In 3 liter zit 950 mL alcohol, dat is $\frac{950}{3000} \times 100\% = 31{,}66...\% \approx 31{,}7\%$.
b In 2000 mL zit 950 mL alcohol, dus $c = \frac{950}{2000} \times 100\% = 47{,}5\%$.
c Bij omgekeerd evenredig moet $c \cdot V$ constant zijn.
Bij a geldt $31{,}66... \cdot 3000 = 95\,000$.
Bij b geldt $47{,}5 \cdot 2000 = 95\,000$.
Dus het klopt met de antwoorden van a en b.
d Er geldt $cV = 95\,000$ en $c = 70$, dus $70V = 95\,000$ en dit geeft $V \approx 1357$.
De apotheker moet 1000 mL alcohol van 95% aanvullen tot 1357mL.
e cV is constant
$c = 0{,}2$ en $V = 500$ geeft $0{,}2 \cdot 500 = 100$
$cV = 100$ en $c = 3$ geeft $3V = 100$ ofwel $V \approx 33{,}3$
De apotheker moet 33,3 mL aanvullen met water.

Bladzijde 111

23 **a** h is omgekeerd evenredig met r, dus $h = \frac{a}{r}$.
$h = \frac{a}{r}$
$r = 750$ en $h = 120$ $\Big\}$ $\frac{a}{750} = 120$
$a = 120 \cdot 750 = 90\,000$
Dus $h = \frac{90\,000}{r}$.
b $h = \frac{90\,000}{r}$ en $r = 500$ geeft $h = \frac{90\,000}{500} = 180$.
Het hoogteverschil is 180 mm.

© Noordhoff Uitgevers bv

c 15 cm, dus $h = 150$.

$h = \frac{90000}{r}$ en $h = 150$ geeft $150 = \frac{90000}{r}$

$150r = 90000$

$r = \frac{90000}{150} = 600$

Een straal van 600 m.

d $\left.\begin{array}{l} h = \frac{a}{r} \\ r = 3320 \text{ en } h = 170 \end{array}\right\}$ $\frac{a}{3320} = 170$

$a = 170 \cdot 3320 = 564400$

Dus $h = \frac{564400}{r}$.

24 **a** H is omgekeerd evenredig met R,

$\left.\begin{array}{l} \text{dus } H = \frac{a}{R} \\ R = 15 \text{ en } H = 25{,}5 \end{array}\right\}$ $\frac{a}{15} = 25{,}5$

$a = 382{,}5$

Dus $H = \frac{382{,}5}{R}$.

b $R = 12{,}5$ geeft $H = \frac{382{,}5}{12{,}5} = 30{,}6$

Dus de hoek is 30,6°.

c $\left.\begin{array}{l} H = 90 - H^* \\ H = \frac{382{,}5}{R} \end{array}\right\}$ $90 - H^* = \frac{382{,}5}{R}$

$H^* = 90 - \frac{382{,}5}{R}$

Bladzijde 112

25 **a** $\left.\begin{array}{l} y = ax^{1{,}8} \\ x = 6 \text{ en } y = 12 \end{array}\right\}$ $a \cdot 6^{1{,}8} = 12$

$a = \frac{12}{6^{1{,}8}} \approx 0{,}48$

De formule is $y = 0{,}48x^{1{,}8}$.

b $\left.\begin{array}{l} P = \frac{a}{t^2} \\ t = 0{,}3 \text{ en } P = 10 \end{array}\right\}$ $\frac{a}{0{,}3^2} = 10$

$a = 10 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}9$

De formule is $P = \frac{0{,}9}{t^2}$.

Bladzijde 113

26 **a** $\left.\begin{array}{l} A = av^2 \\ v = 40 \text{ en } A = 10 \end{array}\right\}$ $a \cdot 40^2 = 10$

$a = \frac{10}{40^2} = 0{,}00625$

De formule is $A = 0{,}00625v^2$.

b $v = 70$ geeft $A = 0{,}00625 \cdot 70^2 \approx 30{,}6$

De remafstand is 30,6 m.

c Als v verdubbelt, dan wordt v^2 vier keer zo groot, dus de remafstand wordt vier keer zo groot.

d $A = 30$ geeft $0{,}00625v^2 = 30$

$v^2 = \frac{30}{0{,}00625} = 4800$

$v = \sqrt{4800} \approx 69$

Zijn snelheid was 69 km/uur.

27 **a** $\left.\begin{array}{l} M = an^{-0{,}322} \\ n = 100 \text{ en } M = 34000 \end{array}\right\}$ $a \cdot 100^{-0{,}322} = 34000$

$a = \frac{34000}{100^{-0{,}322}} = 149788{,}6...$

Dus $M = 150000n^{-0{,}322}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $n = 10$ geeft $M = 150000 \cdot 10^{-0,322} \approx 71465$

$$\frac{34000 - 71465}{71465} \times 100\% \approx -52,4\%$$

Er was dus 52,4% minder tijd nodig.

28 **a** $\left.\begin{array}{l} v = ax^{0,5} \\ x = 950 \text{ en } v = 480 \end{array}\right\}$ $a \cdot 950^{0,5} = 480$

$$a = \frac{480}{950^{0,5}} \approx 15,6$$

Dus $v = 15,6x^{0,5}$.

b $v = 155$ geeft $15,6x^{0,5} = 155$

$$15,6\sqrt{x} = 155$$
$$\sqrt{x} = \frac{155}{15,6} = 9,93...$$
$$x = 9,93...^2 = 98,7...$$

Dus de Victoria watervallen zijn bijna 100 meter hoog.

Bladzijde 114

29 **a** $\left.\begin{array}{l} L = \dfrac{a}{d^2} \\ d = 4 \text{ en } L = 50 \end{array}\right\}$ $\dfrac{a}{4^2} = 50$

$$a = 50 \cdot 4^2 = 800$$

De formule is $L = \dfrac{800}{d^2}$.

b $d = 2$ geeft $L = \dfrac{800}{2^2} = 200$

De geluidssterkte is 200.

c $L = 20$ geeft $\dfrac{800}{d^2} = 20$

$$20d^2 = 800$$
$$d^2 = 40$$
$$d = \sqrt{40} = 6,32...$$

Dus op een afstand van 6,3 m.

d De afstand d_1 geeft $L_1 = \dfrac{800}{d_1^2}$.

$$\left.\begin{array}{l} d_2 = 2d_1 \\ L_2 = \dfrac{800}{d_2^2} \end{array}\right\} L_2 = \frac{800}{d_2^2} = \frac{800}{(2d_1)^2} = \frac{800}{4d_1^2} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{800}{d_1^2}$$

Dus de geluidssterkte wordt 4 keer zo klein.

30 **a** 720 km/uur is $\dfrac{720}{3,6} = 200$ m/s.

$\left.\begin{array}{l} W_l = av^2 \\ v = 200 \text{ en } W_l = 120000 \end{array}\right\}$ $a \cdot 200^2 = 120000$

$$a = \frac{120000}{200^2} = 3$$

Dus $W_l = 3v^2$.

$\left.\begin{array}{l} W_i = \dfrac{b}{v^2} \\ v = 200 \text{ en } W_i = 300000 \end{array}\right\}$ $\dfrac{b}{200^2} = 300000$

$$b = 300000 \cdot 200^2 = 1,2 \cdot 10^{10}$$

Dus $W_i = \dfrac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$.

b $W = W_l + W_i = 3v^2 + \dfrac{1,2 \cdot 10^{10}}{v^2}$

Voer in $y_1 = 3x^2 + \dfrac{1,2 \cdot 10^{10}}{x^2}$.

De optie minimum geeft $x \approx 251,5$ en $y_1 \approx 379473$.

Dus bij een snelheid van $3,6 \cdot 251,5 \approx 905$ km/uur is de totale weerstand minimaal.

c $v = 251,5$ geeft $W_l = 3 \cdot 251^2 \approx 189737$ N

$v = 251,5$ geeft $W_i = \dfrac{1,2 \cdot 10^{10}}{251^2} \approx 189737$ N

Dus bij minimale totale weerstand geldt $W_l = W_i$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 115

31 **a** Uit $A = al^2$ volgt $a = \frac{A}{l^2}$.

Bereken daarom steeds $\frac{A}{l^2}$.

$\frac{19}{8^2} \approx 0{,}297$ $\quad$ $\frac{130}{21^2} \approx 0{,}295$ $\quad$ $\frac{411}{37^2} \approx 0{,}300$

$\frac{43}{12^2} \approx 0{,}299$ $\quad$ $\frac{221}{27^2} \approx 0{,}303$ $\quad$ $\frac{506}{41^2} \approx 0{,}301$

$\frac{99}{18^2} \approx 0{,}306$ $\quad$ $\frac{303}{32^2} \approx 0{,}298$ $\quad$ $\frac{635}{46^2} \approx 0{,}300$

Telkens is $\frac{A}{l^2} \approx 0{,}30$.

Dus A is evenredig met l^2 en de formule is $A = 0{,}30l^2$.

b $2\text{ cm}^2 = 200\text{ mm}^2$

$0{,}30l^2 = 200$ geeft $l^2 \approx 667$ ofwel $l \approx 25{,}8$.

De lengte is ongeveer 26 mm.

32 **a** Uit $H = aG^{0,67}$ volgt $a = \frac{H}{G^{0,67}}$.

Bereken daarom steeds $\frac{H}{G^{0,67}}$.

$\frac{19}{2^{0,67}} \approx 11{,}94$ $\quad$ $\frac{142}{40^{0,67}} \approx 11{,}99$ $\quad$ $\frac{490}{250^{0,67}} \approx 12{,}12$

$\frac{56}{10^{0,67}} \approx 11{,}97$ $\quad$ $\frac{138}{175^{0,67}} \approx 11{,}94$

Telkens is $\frac{H}{G^{0,67}} \approx 12$.

Dus H is evenredig met $G^{0,67}$ en de formule is $H = 12G^{0,67}$.

b $G = 60$ geeft $H = 12 \cdot 60^{0,67} \approx 186$

De hersenmassa is ongeveer 186 gram.

33 **a** Uit $G = aR^3$ volgt $a = \frac{G}{R^3}$.

Bereken daarom steeds $\frac{G}{R^3}$.

$\frac{156}{1{,}25^3} \approx 79{,}9$ $\quad$ $\frac{298}{1{,}55^3} \approx 80{,}0$ $\quad$ $\frac{507}{1{,}85^3} \approx 80{,}1$

$\frac{220}{1{,}4^3} \approx 80{,}2$ $\quad$ $\frac{467}{1{,}80^3} \approx 80{,}1$

Telkens is $\frac{G}{R^3} \approx 80$.

Dus G is evenredig met R^3 en de formule is $G = 80R^3$.

b Paard 1 met rompomvang R_1 geeft $G_1 = 80R_1^3$.

$\left.\begin{array}{l}\text{Paard 2 met rompomvang } R_2 \text{ geeft } G_2 = 80R_2^3 \\ R_2 = 1{,}2R_1\end{array}\right\} G_2 = 80 \cdot (1{,}2R_1)^3 = 80 \cdot 1{,}2^3 \cdot R_1^3 = 1{,}728 \cdot 80R_1^3$

Dus het gewicht is 1,728 keer zo groot.

34 **a** $xy = 15$ geeft $y = \frac{15}{x}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot y = 1{,}2$ geeft $y = \frac{1{,}2}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$

b Voer in $y_1 = \frac{15}{x}$ en $y_2 = \frac{1{,}2}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}$.

Intersect geeft $x = 1{,}776...$ en $y = 8{,}445...$

Dus $x \approx 1{,}78$ en $y \approx 8{,}45$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 116

35 **a** $\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a}{Q^n} \\ P = 2{,}0 \text{ en } Q = 0{,}30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{0{,}30^n} = 2{,}0 \\ a = 2{,}0 \cdot 0{,}30^n \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} P = \dfrac{a}{Q^n} \\ P = 3{,}8 \text{ en } Q = 0{,}06 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{a}{0{,}06^n} = 3{,}8 \\ a = 3{,}8 \cdot 0{,}06^n \end{array}$

Voer in $y_1 = 2{,}0 \cdot 0{,}30^x$ en $y_2 = 3{,}8 \cdot 0{,}06^x$.
Intersect geeft $x = 0{,}399...$ en $y = 1{,}237...$
Dus $P = \dfrac{1{,}24}{Q^{0{,}40}}$.

b Voer in $y_3 = \dfrac{1{,}24}{x^{0{,}40}}$ en $y_4 = 7{,}4$.
Intersect geeft $x = 0{,}011...$
Dus $Q \approx 0{,}01$.

c Trace met $x = 0{,}4$ geeft $y_3 = 1{,}788...$
Dus $P \approx 1{,}79$.

36 **a** $\left.\begin{array}{l} W = am^n \\ m = 30 \text{ en } W = 90 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 30^m = 90 \\ a = \dfrac{90}{30^m} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} W = am^n \\ m = 70 \text{ en } W = 190 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 70^m = 190 \\ a = \dfrac{190}{70^m} \end{array}$

Voer in $y_1 = \dfrac{90}{30^x}$ en $y_2 = \dfrac{190}{70^x}$.
Intersect geeft $x = 0{,}881...$ en $y = 4{,}483...$
Dus $a \approx 4{,}48$ en $n \approx 0{,}88$.
De formule is $W = 4{,}48m^{0{,}88}$.
1,2 liter per dag is 1200 : 24 = 50 mL per uur.
Voer in $y_1 = 4{,}48x^{0{,}88}$ en $y_2 = 50$.
Intersect geeft $x = 15{,}5...$
Dus de massa van de gazelle is 15 kg.

11.3 Standaardfuncties

Bladzijde 118

37 **a** De grafiek is lijnsymmetrisch voor even waarden van n.
De grafiek is puntsymmetrisch voor oneven waarden van n.

b Alle grafieken van $f(x) = \frac{1}{2}x^n$ gaan door de punten $(0, 0)$ en $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Bladzijde 119

38 **a** $y = 0{,}3x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-5,\, 6)} y = 0{,}3(x + 5)^4 + 6 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3(0{,}3(x + 5)^4 + 6)$
ofwel $y = 0{,}9(x + 5)^4 + 18$
De top is $(-5, 18)$.

b $y = 0{,}3x^4 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 3} y = 3 \cdot 0{,}3x^4 = 0{,}9x^4 \xrightarrow{\text{translatie } (-5,\, 6)} y = 0{,}9(x + 5)^4 + 6$
De top is $(-5, 6)$.

Bladzijde 120

39 **a** $f(x) = 0{,}01(3x - 8)^4 - 5$ geeft $f'(x) = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}01(3x - 8)^3 = 0{,}12(3x - 8)^3$
helling $= f'(4) = 0{,}12(12 - 8)^3 = 0{,}12 \cdot 4^3 = 7{,}68$

b $y = 0{,}01(3x - 8)^4 - 5 = 0{,}01\left(3\left(x - 2\frac{2}{3}\right)\right)^4 - 5 = 0{,}01 \cdot 3^4 \cdot \left(x - 2\frac{2}{3}\right)^4 - 5 = 0{,}81\left(x - 2\frac{2}{3}\right)^4 - 5$

Dus de top van de grafiek van f is $\left(2\frac{2}{3}, -5\right)$.

c $y = 0{,}81\left(x - 2\frac{2}{3}\right)^4 - 5 \xrightarrow{\text{translatie } (4,\, 6)} y = 0{,}81\left(x - 6\frac{2}{3}\right)^4 + 1 \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } -2} y = -1{,}62\left(x - 6\frac{2}{3}\right)^4 - 2$
Dus de top van de beeldgrafiek is $\left(6\frac{2}{3}, -2\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

40 **a** $y = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 2} y = 2\sqrt{x} \xrightarrow{\text{translatie } (-3,\,-1)} y = 2\sqrt{x+3} - 1$

b $x + 3 \geq 0$ geeft $x \geq -3$, dus $D_f = [-3, \rightarrow\rangle$ en beginpunt $(-3, -1)$.
$B_f = [-1, \rightarrow\rangle$

c $f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$

helling $= f'(1) = \dfrac{1}{\sqrt{1+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

d Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-2) = \dfrac{1}{\sqrt{-2+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{1}} = 1$

$$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ f(-2) = 1, \text{ dus } B(-2, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 1 \\ b = 3 \end{array}$$

Dus k: $y = x + 3$.

e $f(x) = 4$ geeft $2\sqrt{x+3} - 1 = 4$

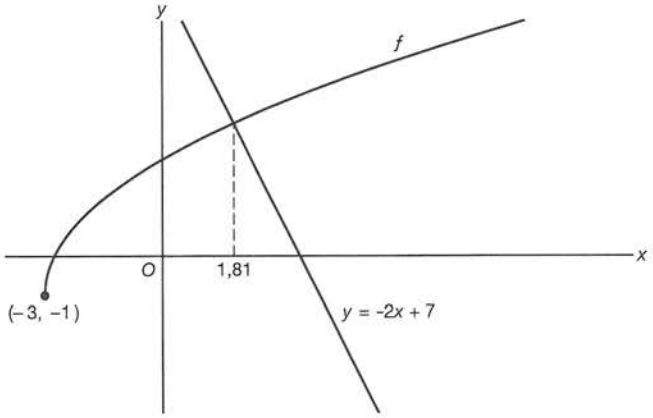
$2\sqrt{x+3} = 5$

$\sqrt{x+3} = 2\frac{1}{2}$

$x + 3 = 6\frac{1}{4}$

$x = 3\frac{1}{4}$

f Voer in $y_1 = 2\sqrt{x+3} - 1$ en $y_2 = -2x + 7$.
Intersect geeft $x = 1{,}807...$



$f(x) < -2x + 7$ geeft $-3 \leq x < 1{,}81$

41 **a** $y = \dfrac{1}{x} \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 2} y = \dfrac{2}{x} \xrightarrow{\text{translatie } (3,\,4)} y = \dfrac{2}{x-3} + 4$

b $x - 3 = 0$ geeft $x = 3$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 3$.
Voor grote (en kleine) x is $f(x) \approx 0 + 4 = 4$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.

c $f(x) = \dfrac{2}{x-3} + 4 = 2(x-3)^{-1} + 4$ geeft $f'(x) = 2 \cdot -1(x-3)^{-2} = \dfrac{-2}{(x-3)^2}$

helling $= f'(0) = \dfrac{-2}{(0-3)^2} = -\frac{2}{9}$

d Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(5) = \dfrac{-2}{(5-3)^2} = \dfrac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(5) = 5, \text{ dus } B(5, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot 5 + b = 5 \\ -2\frac{1}{2} + b = 5 \\ b = 7\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + 7\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $f(x) = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$ geeft $\dfrac{2}{x-3} + 4 = \frac{1}{4}x + 2\frac{3}{4}$

$$\frac{2}{x-3} = \tfrac{1}{4}x - 1\tfrac{1}{4}$$
$$\frac{2}{x-3} = \frac{x-5}{4}$$
$$(x-3)(x-5) = 8$$
$$x^2 - 8x + 15 = 8$$
$$x^2 - 8x + 7 = 0$$
$$(x-1)(x-7) = 0$$
$$x = 1 \vee x = 7$$

$f(1) = 3$ en $f(7) = 4\frac{1}{2}$, dus snijpunten $(1, 3)$ en $\left(7, 4\frac{1}{2}\right)$.

42 **a** $y = 3^x \xrightarrow{\text{verm. } x\text{-as, } 4} y = 4 \cdot 3^x \xrightarrow{\text{translatie } (1,\,-5)} y = 4 \cdot 3^{x-1} - 5$

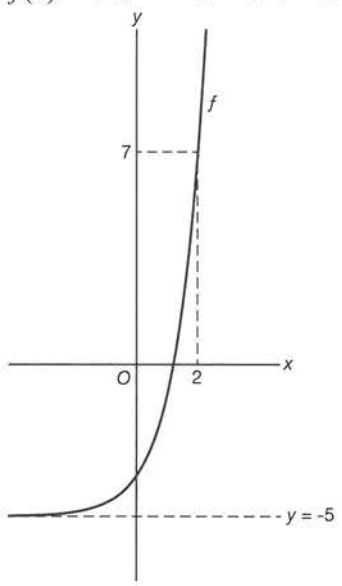
b Voor kleine x is $f(x) \approx 0 - 5 = -5$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -5$.
$B_f = \langle -5, \rightarrow \rangle$

c Voer in $y_1 = 4 \cdot 3^{x-1} - 5$.
$\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} = 1{,}464...$ en $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 39{,}550...$
De helling wordt vermenigvuldigd met de factor $\dfrac{39{,}550...}{1{,}465...} = 27$.

d $f(x) = 319$ geeft $4 \cdot 3^{x-1} - 5 = 319$

$$4 \cdot 3^{x-1} = 324$$
$$3^{x-1} = 81$$
$$3^{x-1} = 3^4$$
$$x - 1 = 4$$
$$x = 5$$

e $f(2) = 4 \cdot 3^{2-1} - 5 = 4 \cdot 3 - 5 = 7$



$x \leq 2$ geeft $-5 < f(x) \leq 7$

Bladzijde 121

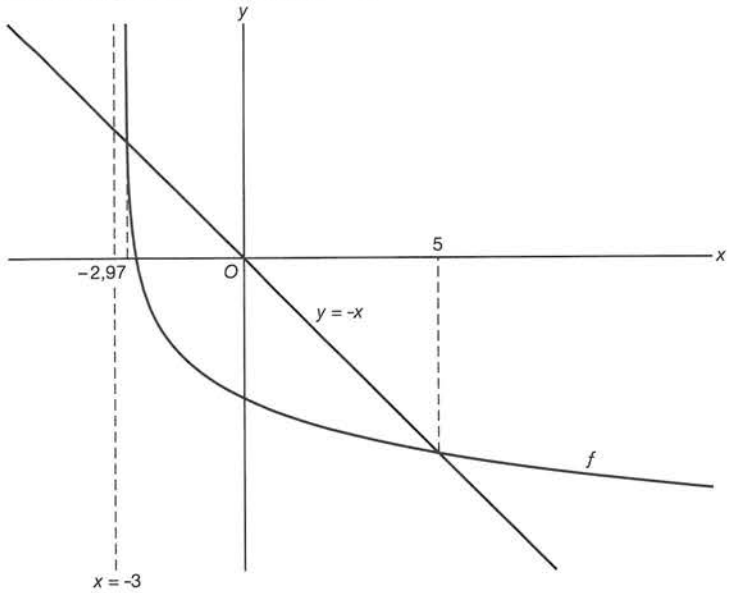
43 **a** $y = \frac{1}{2}\log(x) \xrightarrow{\text{translatie } (-3,\,-2)} y = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$

b $x + 3 = 0$ geeft $x = -3$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.
$D_f = \langle -3, \rightarrow \rangle$

c Snijpunt met de y-as, dus $x = 0$.
Voer in $y_1 = \frac{1}{2}\log(x+3) - 2$.
helling $= \left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=0} \approx -0{,}48$

© Noordhoff Uitgevers bv

d Voer in $y_2 = -x$.
Intersect geeft $x \approx -2{,}97$ en $x = 5$.



$f(x) < -x$ geeft $-2{,}97 < x < 5$

e $f(x) = -4$ geeft $\frac{1}{2}\log(x+3) - 2 = -4$

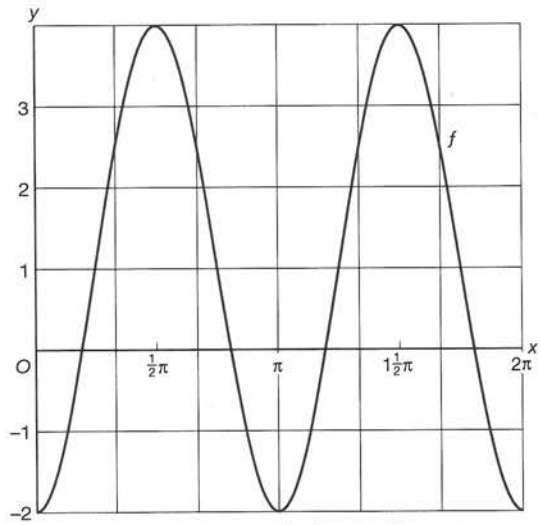
$\frac{1}{2}\log(x+3) = -2$

$x + 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$x + 3 = 4$

$x = 1$

44 **a** evenwichtsstand 1
amplitude 3
periode $\frac{2\pi}{2} = \pi$
beginpunt $\left(\frac{1}{4}\pi, 1\right)$



b $f(x) = 2\frac{1}{2}$ geeft $1 + 3\sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) = 2\frac{1}{2}$

$3\sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) = 1\frac{1}{2}$

$\sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right) = \frac{1}{2}$

$2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$

$x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$

$x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{2}{3}\pi + k \cdot \pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{2}{3}\pi \vee x = 1\frac{1}{3}\pi \vee x = 1\frac{2}{3}\pi$

c Het punt $(0, -2)$ is een laagste punt.
Dus $f(x) = 1 - 3\cos(2x)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11.4 Wortelfuncties en gebroken functies

Bladzijde 123

45 **a** $x = 5$ geeft $(5-5)\sqrt{5} = (5-2)(5-5)$
$0\sqrt{5} = 3 \cdot 0$
$0 = 0$
Klopt, dus $x = 5$ is een oplossing.

b De vergelijking $\sqrt{x} = x - 2$ mist de oplossing $x = 5$.

Bladzijde 124

46 **a** $x\sqrt{2x} = 2x$
$x = 0 \vee \sqrt{2x} = 2$
$x = 0 \vee 2x = 4$
$x = 0 \vee x = 2$
vold. vold.

b $(x-12)\sqrt{x} = (x-12)^2$
$x - 12 = 0 \vee \sqrt{x} = x - 12$
$x = 12 \vee$ kwadrateren geeft
$x = x^2 - 24x + 144$
$x^2 - 25x + 144 = 0$
$(x-9)(x-16) = 0$
$x = 9 \vee x = 16$
vold. vold.
Ook $x = 12$ voldoet, dus $x = 12 \vee x = 9 \vee x = 16$.

c $(x+2)\sqrt{x+4} = (x+2)^2$
$x + 2 = 0 \vee \sqrt{x+4} = x + 2$
$x = -2 \vee$ kwadrateren geeft
$x + 4 = x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 3x = 0$
$x(x+3) = 0$
$x = 0 \vee x = -3$
vold. vold. niet
Ook $x = -2$ voldoet, dus $x = -2 \vee x = 0$.

d $(3x-4)\sqrt{3x-4} = 3x - 4$
$3x - 4 = 0 \vee \sqrt{3x-4} = 1$
$3x = 4 \vee 3x - 4 = 1$
$x = 1\frac{1}{3} \vee 3x = 5$
$x = 1\frac{1}{3} \vee x = 1\frac{2}{3}$
vold. vold.

47 **a** $x\sqrt{x+5} = \frac{3}{4}x^2$
$x = 0 \vee \sqrt{x+5} = \frac{3}{4}x$
$x = 0 \vee$ kwadrateren geeft
$x + 5 = \frac{9}{16}x^2$
$\frac{9}{16}x^2 - x - 5 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot \frac{9}{16} \cdot -5 = 12\frac{1}{4}$
$x = \dfrac{1 + 3\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = 4 \vee x = \dfrac{1 - 3\frac{1}{2}}{\frac{9}{8}} = -2\frac{2}{9}$
vold. vold. niet
Ook $x = 0$ voldoet, dus $x = 0 \vee x = 4$.

b $x\sqrt{2x+1} = 2x^2 - x$
$x\sqrt{2x+1} = x(2x-1)$
$x = 0 \vee \sqrt{2x+1} = 2x - 1$
$x = 0 \vee$ kwadrateren geeft
$2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$
$4x^2 - 6x = 0$
$x(4x - 6) = 0$
$x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$
vold. vold.
Dus $x = 0 \vee x = 1\frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $(x-1)\sqrt{4x+1} = x^2 - 1$
$(x-1)\sqrt{4x+1} = (x+1)(x-1)$
$x - 1 = 0 \vee \sqrt{4x+1} = x + 1$
$x = 1 \vee$ kwadrateren geeft
$4x + 1 = x^2 + 2x + 1$
$x^2 - 2x = 0$
$x(x-2) = 0$
$x = 0 \vee x = 2$
vold. vold.
Ook $x = 1$ voldoet, dus $x = 1 \vee x = 0 \vee x = 2$.

d $(2x-1)^2\sqrt{x+1} = (x-4)^2\sqrt{x+1}$
$\sqrt{x+1} = 0 \vee (2x-1)^2 = (x-4)^2$
$x + 1 = 0 \vee 2x - 1 = x - 4 \vee 2x - 1 = -x + 4$
$x = -1 \vee x = -3 \vee 3x = 5$
$x = -1 \vee x = -3 \vee x = 1\frac{2}{3}$
vold. vold. niet vold.
Dus $x = -1 \vee x = 1\frac{2}{3}$.

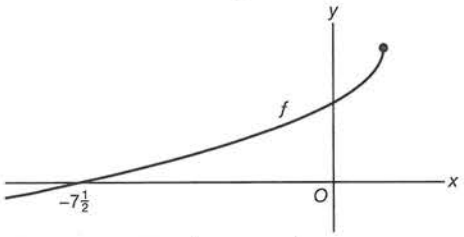
48 **a** $4x - 5 = 0$
$4x = 5$
$x = 1\frac{1}{4}$
$f(1\frac{1}{4}) = -3 + 2 \cdot 0 = -3$, dus $A(1\frac{1}{4}, -3)$.

b $D_f = [1\frac{1}{4}, \rightarrow\rangle$ en $B_f = [-3, \rightarrow\rangle$

Bladzijde 125

49 **a** $6 - 4x \geq 0$
$-4x \geq -6$
$x \leq 1\frac{1}{2}$
Dus $D_f = \langle\leftarrow, 1\frac{1}{2}]$ en $B_f = \langle\leftarrow, 3]$

b $f(x) = 0$ geeft $3 - \frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = 0$
$-\frac{1}{2}\sqrt{6-4x} = -3$
$\sqrt{6-4x} = 6$
$6 - 4x = 36$
$-4x = 30$
$x = -7\frac{1}{2}$



$f(x) > 0$ geeft $-7\frac{1}{2} < x \leq 1\frac{1}{2}$

c $f(-2\frac{1}{2}) = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{6 - 4 \cdot -2\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2}\sqrt{16} = 3 - 2 = 1$
$x \geq -2\frac{1}{2}$ geeft $1 \leq f(x) \leq 3$

Bladzijde 126

50 **a** $10 - 4x = 0$ geeft $-4x = -10$, dus $x = 2\frac{1}{2}$.
Het beginpunt is $(2\frac{1}{2}, 3)$.

b $f(x) = -5$ geeft $3 - 2\sqrt{10-4x} = -5$
$-2\sqrt{10-4x} = -8$
$\sqrt{10-4x} = 4$
$10 - 4x = 16$
$-4x = 6$
$x = -1\frac{1}{2}$
$f(x) > -5$ geeft $-1\frac{1}{2} < x \leq 2\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

c $f(-6\frac{1}{2}) = 2 - 2\sqrt{10 - 4 \cdot -6\frac{1}{2}} = 2 - 2\sqrt{36} = 2 - 12 = -10$

$x \geq -6\frac{1}{2}$ geeft $-10 \leq f(x) \leq 3$

d $f(x) = 3 - 2\sqrt{10 - 4x}$ geeft $f'(x) = -2 \cdot -4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{10 - 4x}} = \dfrac{4}{\sqrt{10 - 4x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1\frac{1}{2}) = \dfrac{4}{\sqrt{10 - 6}} = \dfrac{4}{\sqrt{4}} = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ f(1\frac{1}{2}) = -1, \text{ dus } A(1\frac{1}{2}, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 1\frac{1}{2} + b = -1 \\ b = -4 \end{array}$$

Dus k: $y = 2x - 4$.

e $y = 3 - 2\sqrt{10 - 4x}$
$2\sqrt{10 - 4x} = 3 - y$
kwadrateren geeft
$4(10 - 4x) = (3 - y)^2$
$40 - 16x = 9 - 6y + y^2$
$-16x = -31 - 6y + y^2$
$x = -\frac{1}{16}y^2 + \frac{3}{8}y + 1\frac{15}{16}$

51 **a** $f(x) = 3$ geeft $\sqrt{3x - 8} = 3$
$3x - 8 = 9$
$3x = 17$
$x = 5\frac{2}{3}$

Dus $A(5\frac{2}{3}, 3)$.

$f(x) = \sqrt{3x - 8}$ geeft $f'(x) = 3 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{3x - 8}} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x - 8}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(5\frac{2}{3}) = \dfrac{3}{2\sqrt{3 \cdot 5\frac{2}{3} - 8}} = \dfrac{3}{2\sqrt{9}} = \dfrac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(5\frac{2}{3}, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} \cdot 5\frac{2}{3} + b = 3 \\ 2\frac{5}{6} + b = 3 \\ b = \frac{1}{6} \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}$.

b $\text{rc}_l = 1\frac{1}{2}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2\sqrt{3x - 8}} = 1\frac{1}{2}$$
$3\sqrt{3x - 8} = 3$
$\sqrt{3x - 8} = 1$
$3x - 8 = 1$
$3x = 9$
$x = 3$

$f(3) = 1$, dus $B(3, 1)$.

52 **a** $4x + 6 \geq 0$
$4x \geq -6$
$x \geq -1\frac{1}{2}$
Dus $D_f = [-1\frac{1}{2}, \rightarrow\rangle$.

Het beginpunt is $(-1\frac{1}{2}, 6)$ en $B_f = \langle\leftarrow, 6]$.

b $f(x) = 0$ geeft $6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x + 6} = 0$

$-1\frac{1}{2}\sqrt{4x + 6} = -6$
$\sqrt{4x + 6} = 4$
$4x + 6 = 16$
$4x = 10$
$x = 2\frac{1}{2}$

$f(x) > 0$ geeft $-1\frac{1}{2} \leq x < 2\frac{1}{2}$

c $f(7\frac{1}{2}) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 7\frac{1}{2} + 6} = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{36} = 6 - 1\frac{1}{2} \cdot 6 = 6 - 9 = -3$

$x \leq 7\frac{1}{2}$ geeft $-3 \leq f(x) \leq 6$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $y = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6}$

$1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6} = 6 - y$

$\sqrt{4x+6} = 4 - \frac{2}{3}y$

kwadrateren geeft

$4x + 6 = 16 - 5\frac{1}{3}y + \frac{4}{9}y^2$

$4x = 10 - 5\frac{1}{3}y + \frac{4}{9}y^2$

$x = \frac{1}{9}y^2 - 1\frac{1}{3}y + 2\frac{1}{2}$

e $f(x) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{4x+6}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4x+6}} = -\frac{3}{\sqrt{4x+6}}$

k: $y = ax + b$ met $a = f'(-\frac{1}{2}) = -\frac{3}{\sqrt{-2+6}} = -\frac{3}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2} = -1\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ f(-\frac{1}{2}) = 3, \text{ dus } A(-\frac{1}{2}, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} + b = 3 \\ \frac{3}{4} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{4} \end{array}$$

Dus k: $y = -1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$.

f $\text{rc}_l = -1\frac{1}{5}$ geeft $f'(x) = -1\frac{1}{5}$

$-\frac{3}{\sqrt{4x+6}} = -1\frac{1}{5}$

$-1\frac{1}{5}\sqrt{4x+6} = -3$

$\sqrt{4x+6} = 2\frac{1}{2}$

$4x + 6 = 6\frac{1}{4}$

$4x = \frac{1}{4}$

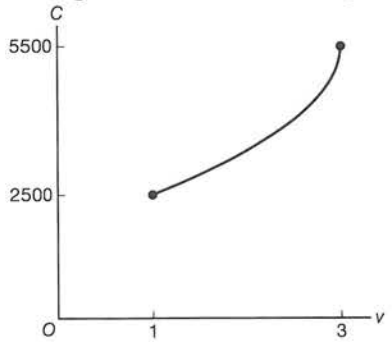
$x = \frac{1}{16}$

$f(\frac{1}{16}) = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+6} = 6 - 1\frac{1}{2}\sqrt{6\frac{1}{4}} = 6 - 1\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus raakpunt } (\frac{1}{16}, 2\frac{1}{4}) \\ y = -1\frac{1}{5}x + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{16} + b = 2\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{40} + b = 2\frac{1}{4} \\ b = 2\frac{13}{40} \end{array}$$

Bladzijde 127

53 **a** $v = 1$ geeft $C = 2500$ en $v = 3$ geeft $C = 5500$.



Het bereik van C is [2500, 5500].

b $p_{\frac{1}{4}} = 0{,}3$, $p_{\frac{1}{2}} = 0{,}5$, en $p_{\frac{3}{4}} = 0{,}2$ geeft $v = 0{,}3 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 1 = 2{,}1$.

$v = 2{,}1$ geeft $C = 5500 - 1500\sqrt{6 - 2 \cdot 2{,}1} = 3487{,}5...$

Dus de capaciteit is ongeveer 3490 voertuigen per uur.

c $5500 - 1500\sqrt{6 - 2v} = 4000$

$-1500\sqrt{6 - 2v} = -1500$

$\sqrt{6 - 2v} = 1$

$6 - 2v = 1$

$-2v = -5$

$v = 2{,}5$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $5500 - 1500\sqrt{6-2v} = 3250$
$-1500\sqrt{6-2v} = -2250$
$\sqrt{6-2v} = 1{,}5$
$6 - 2v = 2{,}25$
$-2v = -3{,}75$
$v = 1{,}875$
$v = 1{,}875$ geeft $0{,}2 \cdot 3 + x \cdot 2 + (1 - 0{,}2 - x) \cdot 1 = 1{,}875$
$0{,}6 + 2x + 0{,}8 - x = 1{,}875$
$x = 0{,}475$
Dus er gaat 47,5% van de voertuigen rechtdoor.

e $5500 - 1500\sqrt{6-2v} = 2800$
$-1500\sqrt{6-2v} = -2700$
$\sqrt{6-2v} = 1{,}8$
$6 - 2v = 3{,}24$
$-2v = -2{,}76$
$v = 1{,}38$
$v = 1{,}38$ geeft $0{,}4 \cdot 3 + x \cdot 2 + (1 - 0{,}4 - x) \cdot 1 = 1{,}38$
$1{,}2 + 2x + 0{,}6 - x = 1{,}38$
$x = -0{,}42$
$x < 0$, dus niet mogelijk.

54 **a** $y = \sqrt{4x - x^2}$ kwadrateren geeft $y^2 = 4x - x^2$.

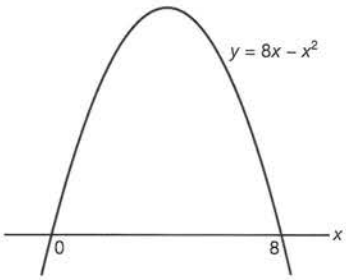
b $y^2 = 4x - x^2$
$x^2 - 4x + y^2 = 0$
$(x-2)^2 - 4 + y^2 = 0$
$(x-2)^2 + y^2 = 4$

c y is de uitkomst van een wortel, dus $y \geq 0$.
De grafiek is dus dat deel van de cirkel dat boven de x-as ligt.

Bladzijde 128

55 **a** De afgeleide van $f(x) = 1 + \sqrt{-x^2 + 8x + 9}$ kan niet algebraïsch berekend worden, omdat onder de wortel geen lineaire vorm staat.

56 **a** $8x - x^2 = 0$
$x(8 - x) = 0$
$x = 0 \vee x = 8$



Dus $D_f = [0, 8]$.

b $y = 3 + \sqrt{8x - x^2}$
$y - 3 = \sqrt{8x - x^2}$
kwadrateren geeft
$(y-3)^2 = 8x - x^2$
$x^2 - 8x + (y-3)^2 = 0$
$(x-4)^2 - 16 + (y-3)^2 = 0$
$\left.\begin{array}{l}(x-4)^2 + (y-3)^2 = 16 \\ y \geq 3\end{array}\right\}$ De grafiek van f is een halve cirkel met middelpunt $M(4, 3)$ en straal 4.

c $f(1) = 3 + \sqrt{8-1} = 3 + \sqrt{7}$
Dus $A\left(1, 3 + \sqrt{7}\right)$.

$\text{rc}_{MA} = \dfrac{3 + \sqrt{7} - 3}{1 - 4} = \dfrac{\sqrt{7}}{-3}$, dus de helling van de grafiek in A is $\dfrac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{7}\sqrt{7}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 129

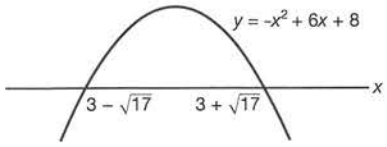
57 **a** $-x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 - 6x - 8 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 36 + 32 = 68$

$x = \dfrac{6 - 2\sqrt{17}}{2} \vee x = \dfrac{6 + 2\sqrt{17}}{2}$

$x = 3 - \sqrt{17} \vee x = 3 + \sqrt{17}$



$-x^2 + 6x + 8 \geq 0$ geeft $D_f = [3 - \sqrt{17}, 3 + \sqrt{17}]$

b $y = 2 - \sqrt{-x^2 + 6x + 8}$

$y - 2 = -\sqrt{-x^2 + 6x + 8}$

kwadrateren geeft

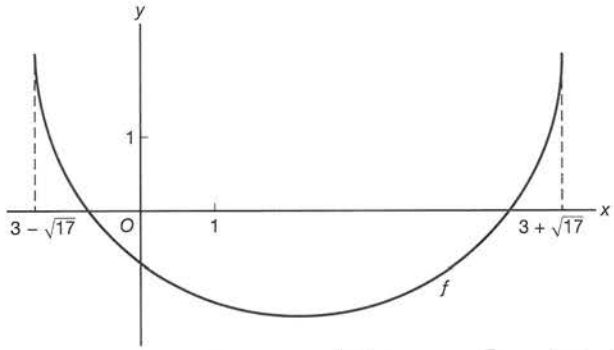
$(y - 2)^2 = -x^2 + 6x + 8$

$x^2 - 6x + (y - 2)^2 = 8$

$(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 = 8$

$\left.\begin{array}{l}(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 17 \\ y \leq 2\end{array}\right\}$ de grafiekvan f is een halve cirkel met middelpunt $M(3, 2)$ en straal $\sqrt{17}$.

c



Het minimum is $f(3) = 2 - \sqrt{17}$, dus $B_f = [2 - \sqrt{17}, 2]$

d $f(2) = 2 - \sqrt{-2^2 + 6 \cdot 2 + 8} = 2 - \sqrt{16} = 2 - 4 = -2$

Dus $A(2, -2)$.

$rc_{MA} = \dfrac{2 - -2}{3 - 2} = 4$, dus $rc_k = -\frac{1}{4}$.

$\left.\begin{array}{l}y = -\frac{1}{4}x + b \\ \text{door } (2, -2)\end{array}\right\}$ $-\frac{1}{4} \cdot 2 + b = -2$

$-\frac{1}{2} + b = -2$

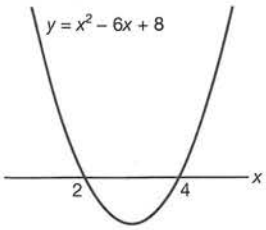
$b = -1\frac{1}{2}$

Dus k: $y = -\frac{1}{4}x - 1\frac{1}{2}$.

58 **a** $x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x - 2)(x - 4) = 0$

$x = 2 \vee x = 4$



$x^2 - 6x + 8 \geq 0$ geeft $x \leq 2 \vee x \geq 4$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 2]$ en $[4, \rightarrow \rangle$.

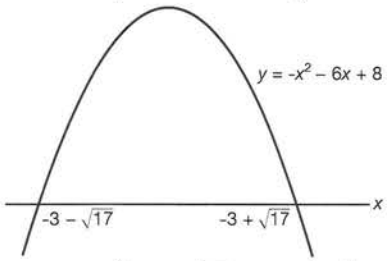
$-x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x - 8 = 0$

$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot -8 = 36 + 32 = 68$

© Noordhoff Uitgevers bv

$x = \frac{-6 - 2\sqrt{17}}{2} \vee x = \frac{-6 + 2\sqrt{17}}{2}$
$x = -3 - \sqrt{17} \vee x = -3 + \sqrt{17}$



Dus $D_g = \left[-3 - \sqrt{17}, -3 + \sqrt{17}\right]$.

b Omdat het domein van f uit twee delen bestaat, kan de grafiek van f niet een (halve) cirkel zijn.

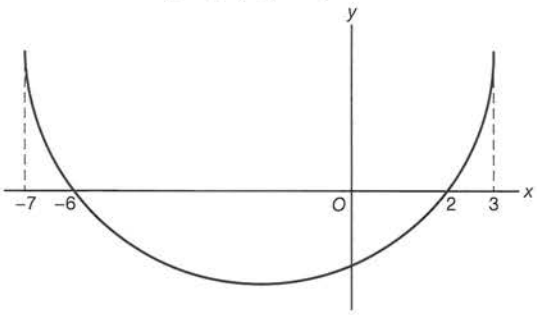
c $y = \sqrt{-x^2 - 6x + 8}$
kwadrateren geeft
$y^2 = -x^2 - 6x + 8$
$x^2 + 6x + y^2 = 8$
$(x + 3)^2 - 9 + y^2 = 8$
$(x + 3)^2 + y^2 = 17$
Omdat $y \geq 0$, is de grafiek van g de halve cirkel met middelpunt $(-3, 0)$ en straal $\sqrt{17}$.

d $f(0) = \sqrt{8}$ en $g(0) = \sqrt{8}$, dus $A\left(0, \sqrt{8}\right)$.
$f'(0) = -\frac{3}{\sqrt{8}}$, dus de raaklijn in A is de lijn l: $y = -\frac{3}{\sqrt{8}}x + \sqrt{8}$.
De lijn m door het middelpunt $(-3, 0)$ en A heeft richtingscoëfficiënt $\frac{0 - \sqrt{8}}{-3 - 0} = \frac{\sqrt{8}}{3}$.
Omdat $-\frac{3}{\sqrt{8}} \cdot \frac{\sqrt{8}}{3} = -1$ staat m loodrecht op l.
Dus l is ook een raaklijn van de halve cirkel.
Dus de grafieken van f en g hebben een gemeenschappelijke raaklijn in het punt $A\left(0, \sqrt{8}\right)$.

59 **a** $y = 3 - \sqrt{-x^2 - 4x + 21}$
$y - 3 = -\sqrt{-x^2 - 4x + 21}$
kwadrateren geeft
$(y - 3)^2 = -x^2 - 4x + 21$
$x^2 + 4x + (y - 3)^2 = 21$
$(x + 2)^2 - 4 + (y - 3)^2 = 21$
$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
$y \leq 3$, dus de grafiek van f is een halve cirkel met middelpunt $M(-2, 3)$ en straal 5.

b Middelpunt $(-2, 3)$ en straal 5 geeft $-2 - 5 \leq x \leq -2 + 5$ en $3 - 5 \leq y \leq 3$
$-7 \leq x \leq 3$ $\quad$ $-2 \leq y \leq 3$
Dus $D_f = [-7, 3]$ en $B_f = [-2, 3]$.

c $f(x) = 0$ geeft $3 - \sqrt{-x^2 - 4x + 21} = 0$
$3 = \sqrt{-x^2 - 4x + 21}$
kwadrateren geeft
$9 = -x^2 - 4x + 21$
$x^2 + 4x - 12 = 0$
$(x - 2)(x + 6) = 0$
$x = 2 \vee x = -6$



$f(x) > 0$ geeft $-7 \leq x < -6 \vee 2 < x \leq 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f(-5) = -1$, dus $A(-5, -1)$.

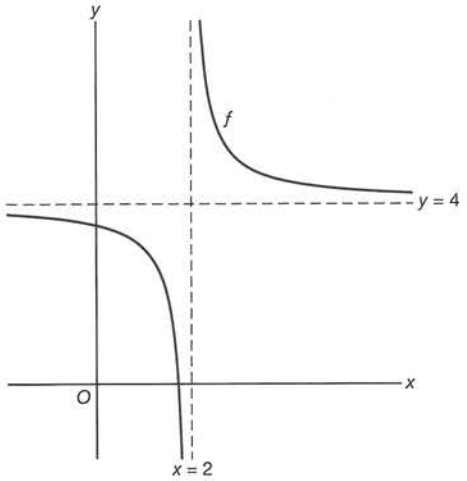
$\text{rc}_{MA} = \dfrac{3 - -1}{-2 - -5} = \frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{3}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } A(-5, -1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot -5 + b = -1 \\ 3\frac{3}{4} + b = -1 \\ b = -4\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $k: y = -\frac{3}{4}x - 4\frac{3}{4}$.

60 **a** De grafiek van $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-2}$ ontstaat uit de standaardgrafiek $y = \dfrac{1}{x}$ door de translatie (2, 4).

b Horizontale asymptoot $y = 4$.
Verticale asymptoot $x = 2$.



c De grafiek van f is op het interval $\langle \leftarrow, 2 \rangle$ toenemend dalend.
De grafiek van f is op het interval $\langle 2, \rightarrow \rangle$ afnemend dalend.

d $f(x) = 4 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4(x-2)}{x-2} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{4x - 8 + 1}{x-2} = \dfrac{4x - 7}{x-2}$

Bladzijde 132

61 **a** noemer = 0 geeft $4 - x = 0$
$x = 4$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

Voor grote x is $f(x) \approx \dfrac{3x}{-x} = -3$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -3$.

b noemer = 0 geeft $2x + 5 = 0$
$2x = -5$
$x = -2\frac{1}{2}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -2\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx \dfrac{2x}{2x} = 1$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

c noemer = 0 geeft $4x - 1 = 0$
$4x = 1$
$x = \frac{1}{4}$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = \frac{1}{4}$.

Voor grote x is $f(x) \approx 2 - \dfrac{x}{4x} = 2 - \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{3}{4}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

62 **a** noemer = 0 geeft $x + 1 = 0$

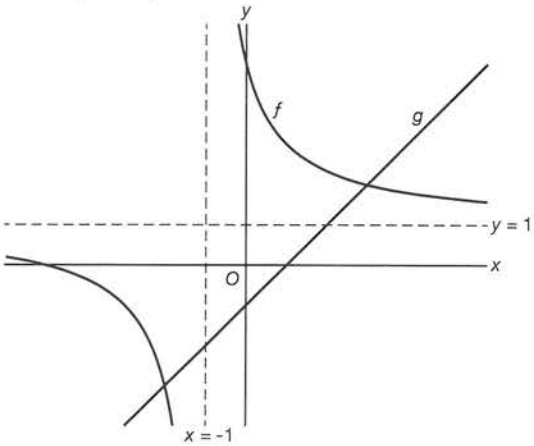
$x = -1$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -1$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{x}{x} = 1$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1$.

x	0	1
$g(x)$	-1	0



b $\frac{x+5}{x+1} = x - 1$

$x + 5 = (x + 1)(x - 1)$

$x + 5 = x^2 - 1$

$-x^2 + x + 6 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-2 \leq x < -1 \vee x \geq 3$

c $y = \frac{x+5}{x+1}$

$y(x + 1) = x + 5$

$xy + y = x + 5$

$xy - x = 5 - y$

$x(y - 1) = 5 - y$

$x = \frac{5-y}{y-1}$

63 **a** noemer = 0 geeft $x + 3 = 0$

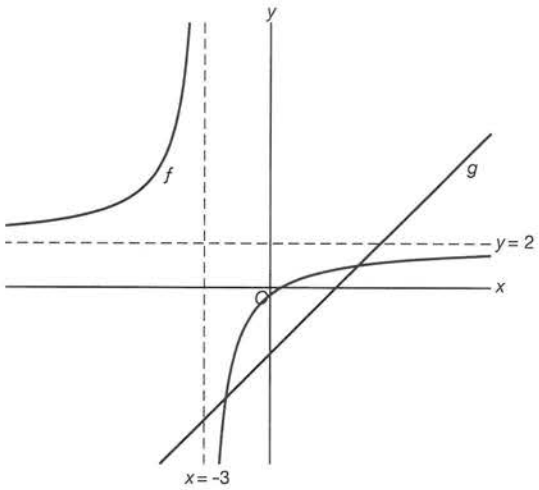
$x = -3$

Dus de verticale asymptoot is de lijn $x = -3$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{2x}{x} = 2$.

Dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

x	0	3
$g(x)$	-3	0



© Noordhoff Uitgevers bv

b $\frac{2x-1}{x+3} = x-3$

$(x+3)(x-3) = 2x-1$

$x^2 - 9 = 2x - 1$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

$x = -2 \vee x = 4$

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-3 < x \leq -2 \vee x \geq 4$

c $h(x) = f(x) + g(x) = \frac{2x-1}{x+3} + x - 3 = \frac{2x-1}{x+3} + \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1+x^2-9}{x+3} = \frac{x^2+2x-10}{x+3}$

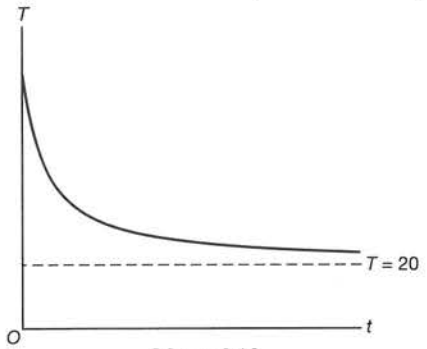
d $j(x) = f(g(x)) = \frac{2(x-3)-1}{x-3+3} = \frac{2x-6-1}{x} = \frac{2x-7}{x} = \frac{2x}{x} - \frac{7}{x} = 2 - \frac{7}{x}$

e $k(x) = g(f(x)) = \frac{2x-1}{x+3} - 3 = \frac{2x-1}{x+3} - \frac{3(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1-3(x+3)}{x+3} = \frac{2x-1-3x-9}{x+3} = \frac{-x-10}{x+3}$

64 **a** Voor grote t is $N \approx \frac{80t}{4t} = 20$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $T = 20$.

Op den duur is de temperatuur tot vrijwel 20 °C gedaald.

b



c Voer in $y_1 = \frac{80x+240}{4x+3}$ en $y_2 = 25$.

Intersect geeft $x = 8{,}25$, dus het duurt 8 uur en een kwartier tot de temperatuur onder 25 °C komt.

d Voer in $y_2 = 31$ en $y_3 = 30$.

Intersect met y_1 en y_2 geeft $x = 3{,}340...$ en met y_1 en y_3 geeft intersect $x = 3{,}75$.

$3{,}75 - 3{,}340... = 0{,}409...$ uur $= 24{,}54...$ minuten

Het duurt dus ongeveer 25 minuten.

e $T = \frac{80t+240}{4t+3}$

$T(4t+3) = 80t + 240$

$4Tt + 3T = 80t + 240$

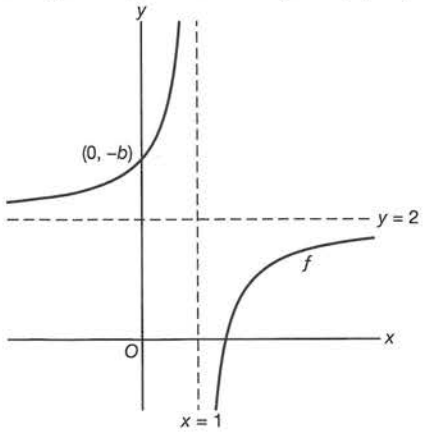
$4Tt - 80t = -3T + 240$

$t(4T - 80) = -3T + 240$

$t = \frac{-3T+240}{4T-80}$

65 De asymptoten van de grafiek van $f(x) = \frac{2x+b}{x-1}$ zijn de lijnen $x = 1$ en $y = 2$.

De grafiek gaat door het punt $(0, -b)$.



De grafiek van f is stijgend op $\langle \leftarrow, 1\rangle$ en $\langle 1, \rightarrow\rangle$ als $-b > 2$ ofwel $b < -2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11.5 Optimaliseringsproblemen

Bladzijde 134

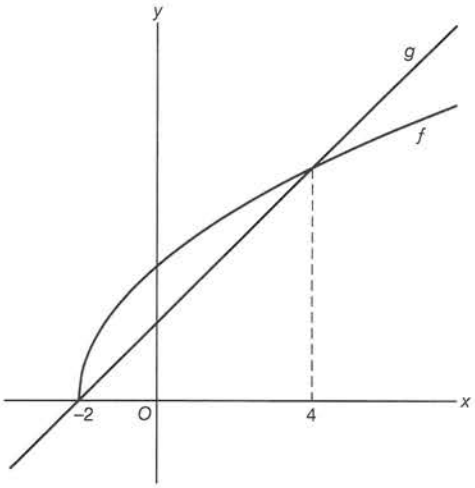
66 $\left.\begin{array}{l} f(1) = \sqrt{1} = 1, \text{ dus } A(1,1) \\ g(1) = \frac{1}{5}, \text{ dus } B\left(1, \frac{1}{5}\right) \end{array}\right\} L = y_A - y_B = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\left.\begin{array}{l} f\left(2\frac{1}{4}\right) = \sqrt{2\frac{1}{4}} = 1\frac{1}{2}, \text{ dus } A\left(2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}\right) \\ g\left(2\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{20}, \text{ dus } B\left(2\frac{1}{4}, \frac{9}{20}\right) \end{array}\right\} L = y_A - y_B = 1\frac{1}{2} - \frac{9}{20} = 1\frac{1}{20}$

$\left.\begin{array}{l} f(9) = \sqrt{9} = 3, \text{ dus } A(9,3) \\ g(9) = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}, \text{ dus } B\left(9, 1\frac{4}{5}\right) \end{array}\right\} L = y_A - y_B = 3 - 1\frac{4}{5} = 1\frac{1}{5}$

Bladzijde 135

67 **a**



$L = f(p) - g(p) = \sqrt{6p + 12} - (p + 2) = \sqrt{6p + 12} - p - 2$

b $\dfrac{dL}{dp} = 6 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{6p + 12}} - 1 = \dfrac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1$

$\dfrac{dL}{dp} = 0$ geeft $\dfrac{3}{\sqrt{6p + 12}} - 1 = 0$

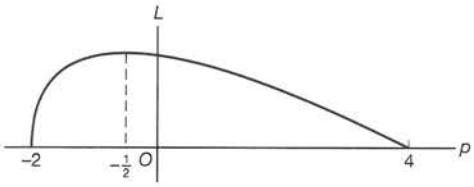
$\dfrac{3}{\sqrt{6p + 12}} = 1$

$\sqrt{6p + 12} = 3$

$6p + 12 = 9$

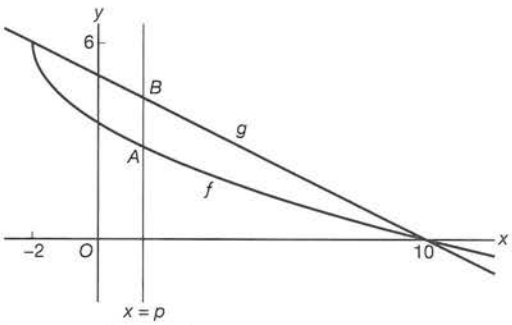
$6p = -3$

$p = -\frac{1}{2}$



$L_{\max} = \sqrt{6 \cdot -\frac{1}{2} + 12} - -\frac{1}{2} - 2 = \sqrt{9} + \frac{1}{2} - 2 = 1\frac{1}{2}$

68 **a**



De grafiek van f ligt onder de grafiek van g, dus

$L = y_B - y_A = -\frac{1}{2}p + 5 - \left(6 - \sqrt{3p + 6}\right) = -\frac{1}{2}p + 5 - 6 + \sqrt{3p + 6} = \sqrt{3p + 6} - \frac{1}{2}p - 1.$

© Noordhoff Uitgevers bv

b $L = \sqrt{3p+6} - \frac{1}{2}p - 1$ geeft $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2}$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\frac{3}{2\sqrt{3p+6}} - \frac{1}{2} = 0$

$\frac{3}{2\sqrt{3p+6}} = \frac{1}{2}$

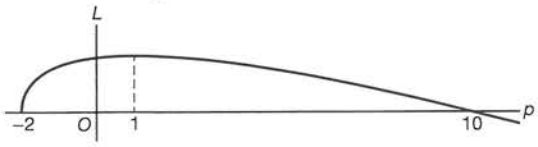
$2\sqrt{3p+6} = 6$

$\sqrt{3p+6} = 3$

$3p + 6 = 9$

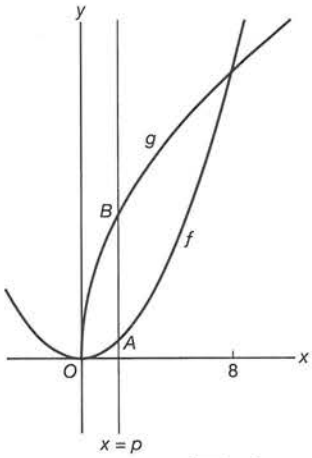
$3p = 3$

$p = 1$



$L_{\max} = \sqrt{3 \cdot 1 + 6} - \frac{1}{2} \cdot 1 - 1 = 3 - \frac{1}{2} - 1 = 1\frac{1}{2}$

69



$L = y_B - y_A = 4\sqrt{2p} - \frac{1}{4}p^2$ geeft $\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p = \frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p$

$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}p} = 0$ geeft $\frac{4}{\sqrt{2p}} - \frac{1}{2}p = 0$

$\frac{4}{\sqrt{2p}} = \frac{p}{2}$

$p\sqrt{2p} = 8$

kwadrateren geeft

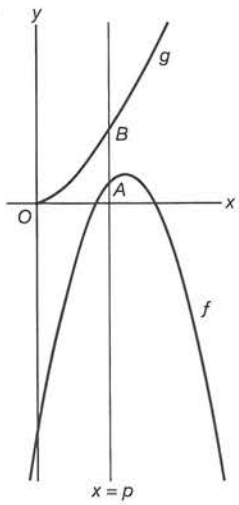
$p^2 \cdot 2p = 64$

$p^3 = 32$

$p = \sqrt[3]{32}$

L is maximaal voor $p = \sqrt[3]{32}$.

70



© Noordhoff Uitgevers bv

$L = y_B - y_A = \frac{2}{3}p\sqrt{p} - (-p^2 + 6p - 8) = \frac{2}{3}p\sqrt{p} + p^2 - 6p + 8$

$L = \frac{2}{3}p\sqrt{p} + p^2 - 6p + 8 = \frac{2}{3}p^{1\frac{1}{2}} + p^2 - 6p + 8$ geeft $\frac{dL}{dp} = \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} + 2p - 6 = \sqrt{p} + 2p - 6$

$\frac{dL}{dp} = 0$ geeft $\sqrt{p} + 2p - 6 = 0$

$\sqrt{p} = -2p + 6$

kwadrateren geeft

$p = (-2p + 6)^2$

$p = 4p^2 - 24p + 36$

$4p^2 - 25p + 36 = 0$

$D = (-25)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36 = 49$

$p = \frac{25 - 7}{8} \vee p = \frac{25 + 7}{8}$

$p = 2\frac{1}{4} \vee p = 4$

vold. vold. niet

$L_{\min} = \frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} + (2\frac{1}{4})^2 - 6 \cdot 2\frac{1}{4} + 8 = 1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} + 5\frac{1}{16} - 13\frac{1}{2} + 8 = 1\frac{13}{16}$

71 **a** De inhoud $I = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h$

$2x^2h = 40$ geeft $h = \frac{40}{2x^2} = \frac{20}{x^2}$

Bij $x = 2$ hoort $h = \frac{20}{2^2} = 5$.

De hoeveelheid materiaal is $M = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5 = 68$.

b Bij $x = 4$ hoort $h = \frac{20}{4^2} = 1{,}25$.

$M = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 1{,}25 + 2 \cdot 4 \cdot 1{,}25 = 62$

c $M = 2x \cdot x + 2 \cdot 2x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h = 2x^2 + 6xh$

Bladzijde 137

72 **a** Stel de hoogte is h dm.

K = kosten bodem + kosten wanden + kosten deksel

$K = x^2 \cdot 0{,}25 + 4xh \cdot 0{,}25 + x^2 \cdot 0{,}50$

$\left.\begin{array}{l} K = 0{,}75x^2 + xh \\ \left.\begin{array}{l} I = x^2h \\ I = 12 \end{array}\right\} x^2h = 12, \text{ dus } h = \frac{12}{x^2} \end{array}\right\} K = 0{,}75x^2 + x \cdot \frac{12}{x^2} = 0{,}75x^2 + \frac{12}{x}$

b $K = 0{,}75x^2 + 12x^{-1}$ geeft $\frac{dK}{dx} = 1{,}5x - 12x^{-2} = 1{,}5x - \frac{12}{x^2} = \frac{1{,}5x^3 - 12}{x^2}$

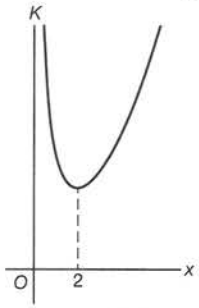
$\frac{dK}{dx} = 0$ geeft $1{,}5x^3 - 12 = 0$

$1{,}5x^3 = 12$

$x^3 = 8$

$x = 2$

$x = 2$ geeft $h = \frac{12}{2^2} = 3$



$x = 2$ geeft $K = 9$

Dus K is minimaal 9 bij de afmetingen 2 bij 2 bij 3 dm.

De minimale kosten zijn 9 euro.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 138

73 **a** Stel de hoogte is h dm.

K = kosten bodem + kosten zijkanten

$K = 2x \cdot x \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 2x \cdot h \cdot 0{,}2 + 2 \cdot x \cdot h \cdot 0{,}2$

$$\left.\begin{array}{l} K = 0{,}8x^2 + 1{,}2xh \\ \left.\begin{array}{l} I = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2h \\ I = 72 \end{array}\right\} 2x^2h = 72, \text{ dus } h = \dfrac{36}{x^2} \end{array}\right\} K = 0{,}8x^2 + 1{,}2x \cdot \frac{36}{x^2} = 0{,}8x^2 + \frac{43{,}2}{x}$$

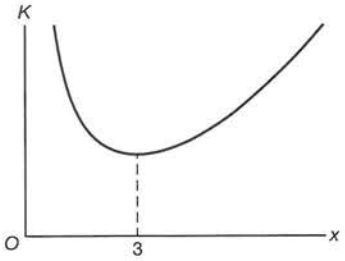
b $K = 0{,}8x^2 + 43{,}2x^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dx} = 1{,}6x - 43{,}2x^{-2} = 1{,}6x - \dfrac{43{,}2}{x^2} = \dfrac{1{,}6x^3 - 43{,}2}{x^2}$

$\dfrac{dK}{dx} = 0$ geeft $1{,}6x^3 - 43{,}2 = 0$

$1{,}6x^3 = 43{,}2$

$x^3 = 27$

$x = 3$

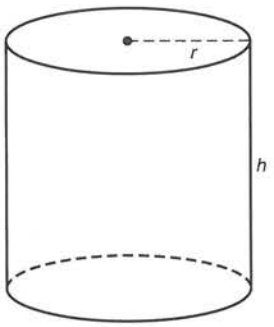


$x = 3$ geeft $h = \dfrac{36}{3^2} = 4$

Dus K is minimaal bij de afmetingen 6 bij 3 bij 4 dm.

De minimale kosten zijn $0{,}8 \cdot 3^2 + \dfrac{43{,}2}{3} = 21{,}60$ euro.

74 **a** $O = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r^2 + 2\pi rh$



b $\left.\begin{array}{l} I = \pi r^2 h \\ I = 1000 \end{array}\right\} \pi r^2 h = 1000$, dus $h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$.

c $\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{1000}{\pi r^2} \\ O = 2\pi r^2 + 2\pi rh \end{array}\right\} O = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \dfrac{2000}{r}$

d $O = 2\pi r^2 + 2000r^{-1}$ geeft $\dfrac{dO}{dr} = 4\pi r - 2000r^{-2}$

$\dfrac{dO}{dr} = 0$ geeft $4\pi r - \dfrac{2000}{r^2} = 0$

$4\pi r = \dfrac{2000}{r^2}$

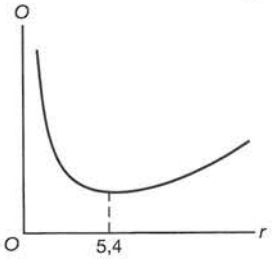
$4\pi r^3 = 2000$

$r^3 = \dfrac{2000}{4\pi}$

$r^3 = \dfrac{500}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 5{,}419...$

$r = 5{,}419...$ geeft $h = \dfrac{1000}{\pi \cdot 5{,}419...^2} = 10{,}838...$



O is minimaal voor $r \approx 5{,}4$.

Dus de hoeveelheid materiaal is minimaal voor $r \approx 5{,}4$ en $h \approx 10{,}8$.

© Noordhoff Uitgevers bv

75 **a** 33 cL = 0,33 liter = 0,33 dm^3

$$\left.\begin{array}{l} I = \pi r^2 h \\ I = 0{,}33 \end{array}\right\} \pi r^2 h = 0{,}33, \text{ dus } h = \frac{0{,}33}{\pi r^2}.$$

K = kosten onderkant + kosten zijkant + kosten bovenkant

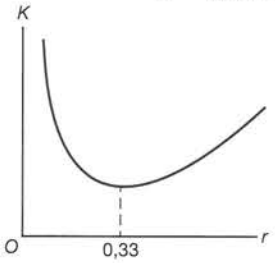
$K = \pi r^2 \cdot 0{,}3 + 2\pi r h \cdot 0{,}3 + \pi r^2 \cdot 0{,}6$

$$\left.\begin{array}{l} K = 0{,}9\pi r^2 + 0{,}6\pi r h \\ h = \dfrac{0{,}33}{\pi r^2} \end{array}\right\} K = 0{,}9\pi r^2 + 0{,}6\pi r \cdot \frac{0{,}33}{\pi r^2} = 0{,}9\pi r^2 + \frac{0{,}198}{r}$$

b $K = 0{,}9\pi r^2 + 0{,}198 r^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dr} = 1{,}8\pi r - 0{,}198 r^{-2} = 1{,}8\pi r - \dfrac{0{,}198}{r^2}$

$\dfrac{dK}{dr} = 0$ geeft $1{,}8\pi r - \dfrac{0{,}198}{r^2} = 0$

$$1{,}8\pi r = \frac{0{,}198}{r^2}$$
$$1{,}8\pi r^3 = 0{,}198$$
$$r^3 = \frac{0{,}198}{1{,}8\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{0{,}198}{1{,}8\pi}}$$
$$r = 0{,}327...$$



De kosten zijn minimaal voor $r = 0{,}327...$

$K = 0{,}9\pi \cdot \left(\sqrt[3]{0{,}327...}\right)^2 = 0{,}907...$

De minimale kosten zijn 0,91 cent.

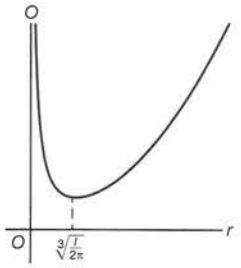
76 $I = \pi r^2 \cdot h$ geeft $h = \dfrac{I}{\pi r^2}$

$$\left.\begin{array}{l} O = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 \\ h = \dfrac{I}{\pi r^2} \end{array}\right\} O = 2\pi r \cdot \frac{I}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2I}{r} + 2\pi r^2$$

$O = 2I \cdot r^{-1} + 2\pi r^2$ geeft $\dfrac{dO}{dr} = -2I \cdot r^{-2} + 4\pi r = -\dfrac{2I}{r^2} + 4\pi r$

$\dfrac{dO}{dr} = 0$ geeft $-\dfrac{2I}{r^2} + 4\pi r = 0$

$$-\frac{2I}{r^2} = -4\pi r$$
$$4\pi r^3 = 2I$$
$$r^3 = \frac{I}{2\pi}$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{I}{2\pi}}$$



$$\left.\begin{array}{l} r^3 = \dfrac{I}{2\pi} \text{ geeft } I = 2\pi r^3 \\ I = \pi r^2 \cdot h \end{array}\right\} \begin{array}{l} \pi r^2 \cdot h = 2\pi r^3 \\ h = 2r \end{array}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

Diagnostische toets

Bladzijde 140

1 $(-3, -6)$ invullen geeft $a \cdot (-3)^2 - 5 \cdot -3 + c = -6$ ofwel $9a + c = -21$.
$(1, -2)$ invullen geeft $a \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + c = -2$ ofwel $a + c = 3$.

$$\begin{cases} 9a + c = -21 \\ a + c = 3 \end{cases} -$$
$$8a = -24$$
$$\left.\begin{array}{l} a = -3 \\ a + c = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -3 + c = 3 \\ c = 6 \end{array}$$

Dus $y = -3x^2 - 5x + 6$.

2 **a** $t = 1$ en $B = 1{,}16$ invullen geeft $a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 = 1{,}16$ ofwel $a + b = 0{,}16$.
$t = 2$ en $B = 2{,}48$ invullen geeft $a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + 2 = 2{,}48$ ofwel $8a + 4b = 0{,}48$.

$$\begin{cases} a + b = 0{,}16 \\ 8a + 4b = 0{,}48 \end{cases} \left|\begin{array}{c} 1 \\ \frac{1}{4} \end{array}\right| \text{ geeft } \begin{cases} a + b = 0{,}16 \\ 2a + b = 0{,}12 \end{cases} -$$
$$-a = 0{,}04$$
$$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}04 \\ a + b = 0{,}16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -0{,}04 + b = 0{,}16 \\ b = 0{,}2 \end{array}$$

Dus $a = -0{,}04$ en $b = 0{,}2$.

b Voer in $y_1 = -0{,}04x^3 + 0{,}2x^2 + x$.
$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=3} = 1{,}12$$
De totale bladoppervlakte neemt toe met een snelheid van 1,12 dm² per maand ofwel $\frac{112}{30} \approx 3{,}73$ cm² per dag.

c De optie maximum met $y_1 = -0{,}04x^3 + 0{,}2x^2 + x$ geeft $x = 5$ en $y = 5$.
Na 5 maanden is de totale bladoppervlakte maximaal.

3 **a** $\left.\begin{array}{l} N = at \\ t = 12{,}6 \text{ en } N = 15{,}75 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 12{,}6a = 15{,}75 \\ a = 1{,}25 \end{array}$

Dus $N = 1{,}25t$.

b $\left.\begin{array}{l} K = \frac{a}{L} \text{ ofwel } a = KL \\ L = 33{,}2 \text{ en } K = 0{,}6 \end{array}\right\} a = 0{,}6 \cdot 33{,}2 = 19{,}92$

Dus $K = \frac{19{,}92}{L}$.

c $\left.\begin{array}{l} A = ap^{0{,}55} \\ p = 10 \text{ en } A = 20 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 10^{0{,}55} = 20 \\ a = \frac{20}{10^{0{,}55}} = 5{,}636... \end{array}$

Dus $A = 5{,}64p^{0{,}55}$.

d $\left.\begin{array}{l} B = \frac{a}{r^3} \\ r = 6 \text{ en } B = 0{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{a}{6^3} = 0{,}5 \\ a = 0{,}5 \cdot 6^3 = 108 \end{array}$

Dus $B = \frac{108}{r^3}$.

4 **a** D is evenredig met $L^{0{,}82}$, dus $D = aL^{0{,}82}$ ofwel $\frac{D}{L^{0{,}82}} = a$.

Berekening van de quotiënten $\frac{D}{L^{0{,}82}}$ geeft $\frac{15}{150^{0{,}82}} = 0{,}246...$, $\frac{21}{220^{0{,}82}} = 0{,}252...$, $\frac{26}{290^{0{,}82}} = 0{,}248...$,
$\frac{37}{440^{0{,}82}} = 0{,}251...$, $\frac{45}{570^{0{,}82}} = 0{,}247...$ en $\frac{64}{870^{0{,}82}} = 0{,}248...$
De quotiënten verschillen weinig, dus D is evenredig met $L^{0{,}82}$ en de formule is $D = 0{,}25L^{0{,}82}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

5 **a** $\left.\begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 108 \text{ en } T = 225 \end{array}\right\}$ $a \cdot 225^b = 108$, dus $a = \dfrac{108}{225^b}$.

$\left.\begin{array}{l} A = aT^b \\ A = 1427 \text{ en } T = 10\,753 \end{array}\right\}$ $a \cdot 10\,753^b = 1427$, dus $a = \dfrac{1427}{10\,753^b}$.

Voer in $y_1 = \dfrac{108}{225^x}$ en $y_2 = \dfrac{1427}{10\,753^x}$.

Intersect geeft $x = 0{,}6667...$ en $y = 2{,}9059...$

Dus $a \approx 2{,}906...$ en $b \approx 0{,}667...$ en dit geeft de formule $A = 2{,}906T^{0{,}667}$.

b $T = 30\,690$ geeft $A = 2{,}906 \cdot 30\,690^{0{,}667} = 2858{,}3...$

Dus de gemiddelde afstand tot de zon is 2858 miljoen km.

Bladzijde 141

6 **a** $f(x) = -0{,}05(2x+6)^4 + 7 = -0{,}05(2(x+3))^4 + 7 = -0{,}05 \cdot 2^4(x+3)^4 + 7 = -0{,}8(x+3)^4 + 7$

De top van de grafiek van f is het punt $(-3, 7)$.

b $f(x) = -3$ geeft $-0{,}8(x+3)^4 + 7 = -3$

$-0{,}8(x+3)^4 = -10$

$(x+3)^4 = 12{,}5$

$x + 3 = \sqrt[4]{12{,}5} \vee x + 3 = -\sqrt[4]{12{,}5}$

$x = -3 + \sqrt[4]{12{,}5} \vee x = -3 - \sqrt[4]{12{,}5}$

Dus de lengte van AB is $-3 + \sqrt[4]{12{,}5} - \left(-3 + \sqrt[4]{12{,}5}\right) = 2 \cdot \sqrt[4]{12{,}5}$.

c $y = -0{,}8(x+3)^4 + 7$

$\downarrow$ translatie $(3, -4)$

$y = -0{,}8(x - 3 + 3)^4 + 7 - 4$ ofwel

$y = -0{,}8 \cdot x^4 + 3$

$\downarrow$ verm. x-as, -10

$y = 8x^4 - 30$

7 **a** $y = {}^2\log(x)$

$\downarrow$ verm. x-as, 4

$y = 4 \cdot {}^2\log(x)$

$\downarrow$ translatie $(-1, 3)$

$y = 4 \cdot {}^2\log(x+1) + 3$

b Voer in $y_1 = 4 \cdot {}^2\log(x+1) + 3$ en $y_2 = 2 - x$.

Intersect geeft $x = -0{,}1386...$ en $y = 2{,}1386...$

$\left[\dfrac{dy_1}{dx}\right]_{x=-0{,}1386...} = 6{,}699...$

Dus de helling van de grafiek van f is 6,70.

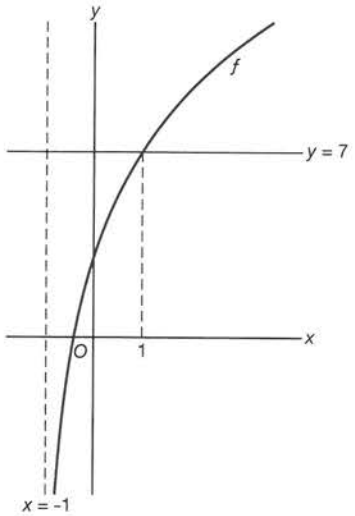
c $f(x) = 7$ geeft $4 \cdot {}^2\log(x+1) + 3 = 7$

$4 \cdot {}^2\log(x+1) = 4$

${}^2\log(x+1) = 1$

$x + 1 = 2$

$x = 1$



$f(x) \leq 7$ geeft $-1 < x \leq 1$

© Noordhoff Uitgevers bv

8 **a** $5 - 2x \geq 0$ geeft $-2x \geq -5$ ofwel $x \leq 2\frac{1}{2}$

Dus $D_f = \langle \leftarrow, 2\frac{1}{2}]$.

$f(2\frac{1}{2}) = -2$, dus $B_f = [-2, \rightarrow\rangle$.

b $f(x) = 0$ geeft $-2 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = 0$

$\frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = 2$

$\sqrt{5-2x} = 6$

$5 - 2x = 36$

$-2x = 31$

$x = -15\frac{1}{2}$

$f(x) < 0$ geeft $-15\frac{1}{2} < x \leq 2\frac{1}{2}$

c $f(x) = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x}$ geeft $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5-2x}} = -\frac{1}{3\sqrt{5-2x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{3\sqrt{5-4}} = -\frac{1}{3\sqrt{1}} = -\frac{1}{3}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{3}x + b \\ f(2) = -1\frac{2}{3}, \text{ dus } A(2, -1\frac{2}{3}) \end{array}\right\}$ $-\frac{1}{3} \cdot 2 + b = -1\frac{2}{3}$

$-\frac{2}{3} + b = -1\frac{2}{3}$

$b = -1$

Dus k: $y = -\frac{1}{3}x - 1$.

d $y = -2 + \frac{1}{3}\sqrt{5-2x}$

$\frac{1}{3}\sqrt{5-2x} = y + 2$

$\sqrt{5-2x} = 3y + 6$

kwadrateren geeft

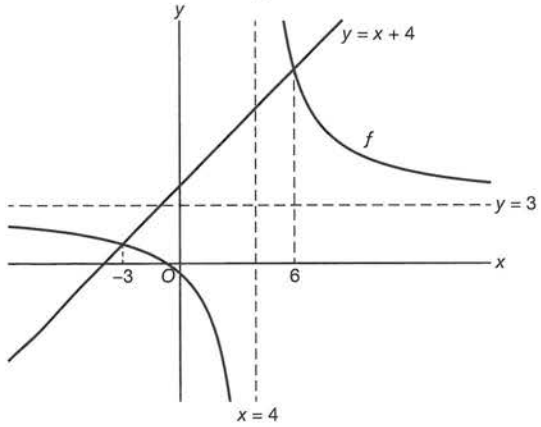
$5 - 2x = 9y^2 + 36y + 36$

$-2x = 9y^2 + 36y + 31$

$x = -4\frac{1}{2}y^2 - 18y - 15\frac{1}{2}$

9 **a** noemer $= 0$ geeft $x = 4$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 4$.

Voor grote x is $f(x) \approx \frac{3x}{x} = 3$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 3$.



b $f(x) = g(x)$ geeft $\frac{3x+2}{x-4} = x + 4$

$3x + 2 = (x+4)(x-4)$

$3x + 2 = x^2 - 16$

$x^2 - 3x - 18 = 0$

$(x+3)(x-6) = 0$

$x = -3 \vee x = 6$

Zie de figuur bij a.

$f(x) \geq g(x)$ geeft $x \leq -3 \vee 4 < x \leq 6$

c $h(x) = \frac{3x+2}{x-4} + x + 4 = \frac{3x+2}{x-4} + \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = \frac{3x+2+x^2-16}{x-4} = \frac{x^2+3x-14}{x-4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $y = \dfrac{3x+2}{x-4}$

$y(x-4) = 3x+2$

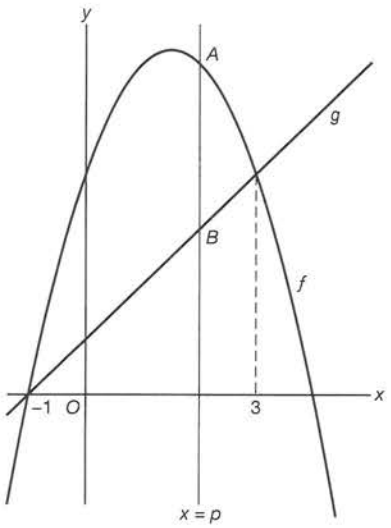
$xy - 4y = 3x+2$

$xy - 3x = 4y+2$

$x(y-3) = 4y+2$

$x = \dfrac{4y+2}{y-3}$

10



De lengte L van het lijnstuk AB is gelijk aan $y_A - y_B = -p^2 + 3p + 4 - (p+1) = -p^2 + 2p + 3$

Dus $L(p) = -p^2 + 2p + 3$.

$p_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-2} = 1$ geeft $L_{\text{top}} = L(1) = -1 + 2 + 3 = 4$

Dus de maximale lengte van AB is 4.

11 Lengte x geeft breedte $\frac{1}{3}x$.

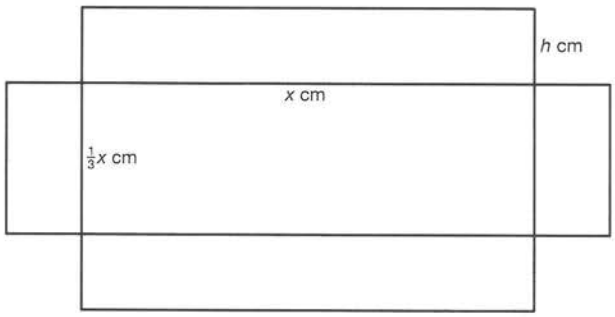
Stel hoogte = h.

3 liter = 3000 cm^3

$\left.\begin{array}{l}\text{inhoud} = x \cdot \frac{1}{3}x \cdot h \\ \text{inhoud} = 3000\end{array}\right\} x \cdot \frac{1}{3}x \cdot h = 3000$

$h = \dfrac{3000}{\frac{1}{3}x^2}$

$h = \dfrac{9000}{x^2}$



De totale oppervlakte A van de doos is

$A = \frac{1}{3}x \cdot x + 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot \frac{1}{3}x \cdot h = \frac{1}{3}x^2 + 2\frac{2}{3}x \cdot h = \frac{1}{3}x^2 + 2\frac{2}{3}x \cdot \dfrac{9000}{x^2} = \frac{1}{3}x^2 + \dfrac{24000}{x} = \frac{1}{3}x^2 + 24000x^{-1}$

$A = \frac{1}{3}x^2 + 24000x^{-1}$ geeft $\dfrac{dA}{dx} = \frac{2}{3}x - 24000x^{-2} = \frac{2}{3}x - \dfrac{24000}{x^2}$

$\dfrac{dA}{dx} = 0$ geeft $\frac{2}{3}x - \dfrac{24000}{x^2} = 0$

$\dfrac{2x}{3} = \dfrac{24000}{x^2}$

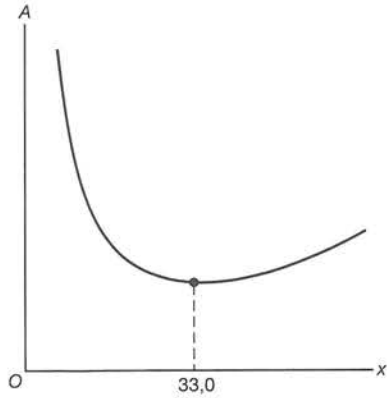
$2x^3 = 72000$

$x^3 = 36000$

$x = \sqrt[3]{36000}$

$x = 33{,}01...$

© Noordhoff Uitgevers bv



$x = \sqrt[3]{36\,000}$ geeft $h = \dfrac{9000}{\left(\sqrt[3]{36\,000}\right)^2} = 8{,}25...$

De oppervlakte is minimaal bij de afmetingen 33,0 bij 11,0 bij 8,3 cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

12 Examentraining

12.1 Algemene vaardigheden

Bladzijde 146

1 $-2x + 12 \geq 0$ geeft $-2x \geq -12$ ofwel $x \leq 6$, dus $D_f = \langle \leftarrow, 6]$.
$f(x) = g(x)$ geeft $\sqrt{-2x + 12} = x - 1$
kwadrateren geeft
$-2x + 12 = x^2 - 2x + 1$
$-x^2 = -11$
$x^2 = 11$
$x = \sqrt{11} \vee x = -\sqrt{11}$
vold. vold. niet
$f(x) \leq g(x)$ geeft $\sqrt{11} \leq x \leq 6$

2 $\sqrt{4x - 12} = 2x - 5$
kwadrateren geeft
$4x - 12 = (2x - 5)^2$
$4x - 12 = 4x^2 - 20x + 25$
$-4x^2 + 24x - 37 = 0$
$D = 24^2 - 4 \cdot -4 \cdot -37 = -16$
De vergelijking heeft geen oplossingen, dus de grafiek van f en de lijn $y = 2x - 5$ snijden elkaar niet.

3 **a** $f_{28}(x) = 0$
$(x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = 0$
$x^2 - 11x + 28 = 0 \vee \sqrt{x} = 0$
$(x - 4)(x - 7) = 0 \vee x = 0$
$x = 4 \vee x = 7 \vee x = 0$
Dus de gevraagde x-coördinaten zijn 0, 4 en 7.

b $f_c(x) = 0$
$(x^2 - 11x + c)\sqrt{x} = 0$
$x^2 - 11x + c = 0 \vee \sqrt{x} = 0$
$x^2 - 11x + c = 0 \vee x = 0$
De grafiek van f_c moet de x-as raken, dus $x^2 - 11x + c = 0$ heeft één oplossing.
Dus $D = 0$. Dit geeft $(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = 0$
$121 - 4c = 0$
$-4c = -121$
$c = 30\frac{1}{4}$

Bladzijde 147

4 $f(x) = 3$ geeft $\sqrt{8x - 4} = 3$
$8x - 4 = 9$
$8x = 13$
$x = 1\frac{5}{8}$
Dus $A(1\frac{5}{8}, 3)$.
$g(x) = 3$ geeft $x^2 + 1 = 3$
$x^2 = 2$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$
Dus $C(\sqrt{2}, 3)$.
Dus de lengte van het lijnstuk CA is $x_A - x_C = 1\frac{5}{8} - \sqrt{2}$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

5 Snijden van de grafiek van f en de lijn l geeft $1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12} = -x + 4$

$\sqrt{-x^2 - 4x + 12} = -x + 3$

kwadrateren geeft

$-x^2 - 4x + 12 = (-x + 3)^2$

$-x^2 - 4x + 12 = x^2 - 6x + 9$

$-2x^2 + 2x + 3 = 0$

$2x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -3 = 28$

$x = \dfrac{2 + \sqrt{28}}{4} \vee x = \dfrac{2 - \sqrt{28}}{4}$

$x = \dfrac{2 + 2\sqrt{7}}{4} \vee x = \dfrac{2 - 2\sqrt{7}}{4}$

$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} \vee x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$

Dus $x_A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ en $x_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$.

6 $\dfrac{1}{(4x + 3)^2} = \frac{1}{2}$

$(4x + 3)^2 = 2$

$4x + 3 = \sqrt{2} \vee 4x + 3 = -\sqrt{2}$

$4x = -3 + \sqrt{2} \vee 4x = -3 - \sqrt{2}$

$x = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \vee x = -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{2}$

De coördinaten zijn $\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$ en $\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7 $(x + 2)\sqrt{x + 2} = x(x + 2)$

$x + 2 = 0 \vee \sqrt{x + 2} = x$

$x = -2 \vee \sqrt{x + 2} = x$

$\sqrt{x + 2} = x$ kwadrateren geeft $x + 2 = x^2$

$-x^2 + x + 2 = 0$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$x = -1 \vee x = 2$

vold. niet vold.

De x-coördinaten van A en B zijn -2 en 2.

Bladzijde 148

8 **a** $y_A = f(p) = \sqrt{27p - p^4}$ en $y_B = g(p) = \sqrt{8p - p^4}$

$AB = 3$ ofwel $y_A - y_B = 3$ geeft $\sqrt{27p - p^4} - \sqrt{8p - p^4} = 3$

Voer in $y_1 = \sqrt{27x - x^4} - \sqrt{8x - x^4}$ en $y_2 = 3$.

Intersect geeft $x = 1{,}338...$

Dus $p \approx 1{,}34$.

b $27x - x^4 = 0$

$x(27 - x^3) = 0$

$x = 0 \vee x^3 = 27$

$x = 0 \vee x = 3$

$27x - x^4 \geq 0$ geeft $0 \leq x \leq 3$, dus $D_f = [0, 3]$.

Voer in $y_1 = \sqrt{27x - x^4}$.

De optie maximum geeft $x = 1{,}889...$ en $y = 6{,}186...$

Dus $B_f = [0; 6{,}19]$.

9 $1 - x^2 \geq 0$ geeft $x^2 \leq 1$ ofwel $-1 \leq x \leq 1$, dus $D_f = [-1, 1]$.

Voer in $y_1 = \sqrt{1 - x^2}$ en $y_2 = -\frac{1}{30}x^3 + x^2 - 1{,}9x + 1{,}58$.

Intersect geeft $x = 0{,}533...$ en $x = 0{,}656...$

$f(x) < g(x)$ geeft $-1 \leq x < 0{,}53 \vee 0{,}66 < x \leq 1$

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 149

10 $f(x) = x^2 + \frac{12}{x^2}$ geeft $f(1) = 1^2 + \frac{12}{1^2} = 13$

$f(x) = 13$

$x^2 + \frac{12}{x^2} = 13$

Voer in $y_1 = x^2 + \frac{12}{x^2}$ en $y_2 = 13$.

Intersect geeft $x = 1$ en $x = 3{,}464...$

De afstand tussen A en B is $x_B - x_A = 3{,}464... - 1 \approx 2{,}46$.

11 **a** $U(t) = 0$ geeft $1{,}2 - 7{,}0t = 0$

$7{,}0t = 1{,}2$

$t = \frac{1{,}2}{7{,}0}$

$t = 0{,}1714...$

$K(t) = 0$ geeft $2{,}8 - 16{,}5t = 0$

$16{,}5t = 2{,}8$

$t = \frac{2{,}8}{16{,}5}$

$t = 0{,}1696...$

Het verschil is $0{,}1714... - 0{,}1696... = 0{,}00173...$

Dat is $0{,}00173 \cdot 3600 \approx 6{,}2$ seconden.

b De afstand $D(t)$ tussen de twee schepen is $D(t) = \sqrt{(1{,}2 - 7{,}0t)^2 + (2{,}8 - 16{,}5t)^2}$.

Voer in $y_1 = \sqrt{(1{,}2 - 7{,}0x)^2 + (2{,}8 - 16{,}5x)^2}$ en $y_2 = 0{,}2$.

Intersect geeft $x = 0{,}1588...$ en $x = 0{,}1811...$

$0{,}1588... \cdot 60 = 9{,}52...$

Dus na ongeveer 10 minuten.

Bladzijde 150

12 Het verschil tussen $f(x)$ en $g(x)$ is $f(x) - g(x)$.

Voer in $y_1 = \sin(x) - \left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$ en $y_2 = 0{,}01$.

Intersect geeft $x = 1{,}042...$

Dus de maximale x (in twee decimalen) is 1,04.

13 $y_P = f(0) = -16$, dus $P(0, -16)$.

$f(x) = 0$ geeft $(x + 1)(x^2 - 16) = 0$

$x = -1 \vee x^2 = 16$

$x = -1 \vee x = 4 \vee x = -4$

Dus $Q(4, 0)$.

$\text{rc}_k = \frac{0 - -16}{4 - 0} = 4$

Dus k: $y = 4x - 16$.

12

Bladzijde 151

14 Voor de verticale asymptoot geldt $0{,}0785 - 0{,}0034T = 0$

$-0{,}0034T = -0{,}0785$

$T = 23{,}08...$

Dus bij de verticale asymptoot hoort de temperatuur van 23 °C.

Dat betekent dat voor een persoon in water van (bijna) 23 °C de overlevingstijd erg groot is. Is de watertemperatuur 23,08... °C, dan is de watertemperatuur nooit levensbedreigend.

15 $y = x\sqrt{x + 18} \xrightarrow{\text{translatie } (18, 0)} y = (x - 18)\sqrt{x - 18 + 18} = (x - 18)\sqrt{x} = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$

Dus het functievoorschrift van g is inderdaad $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

16 **a** $f(0) = -\frac{6}{0-3} + 2 = 4$, dus $A(0, 4)$.

$f(x) = 0$ geeft $-\frac{6}{2x-3} + 2 = 0$

$$\frac{6}{2x-3} = 2$$
$$4x - 6 = 6$$
$$4x = 12$$
$$x = 3$$

Dus $B(3, 0)$.

$\text{rc}_{AB} = \frac{0-4}{3-0} = -1\frac{1}{3}$, dus AB: $y = -1\frac{1}{3}x + 4$.

$2x - 3 = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx 0 + 2 = 2$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 2$.

Het snijpunt van de asymptoten is $S(1\frac{1}{2}, 2)$.

Substitutie van de coördinaten van S in de vergelijking van AB geeft $-1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2} + 4 = 2$

$$-2 + 4 = 2$$
$$2 = 2$$

Dit klopt, dus liggen de punten A, B en S op één lijn.

b $f(x) = -\frac{6}{2x-3} + 2$

$\downarrow$ verm. x-as, 2

$y = -\frac{12}{2x-3} + 4$

$\downarrow$ translatie $(-2, 8)$

$g(x) = -\frac{12}{2(x+2)-3} + 4 + 8$ ofwel $g(x) = -\frac{12}{2x+1} + 12$

$g(0) = -\frac{12}{2 \cdot 0 + 1} + 12 = -\frac{12}{1} + 12 = -12 + 12 = 0$

Dus de grafiek van g gaat door de oorsprong.

Bladzijde 152

17 $g(x) = \sqrt{x}$

$\downarrow$ translatie $(12,0)$

$y = \sqrt{x - 12}$

$\downarrow$ verm. x-as, $\frac{1}{4}$

$f(x) = \sqrt{4x - 12}$

Dus eerst de translatie (12, 0) en dan de vermenigvuldiging t.o.v. de x-as met $\frac{1}{4}$.

Bladzijde 153

18 De grafiek van p als functie van h gaat door het punt (0, 1013) en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{1}{30}$.

Dus $p = -\frac{1}{30}h + 1013$.

Omwerken van $p = -\frac{1}{30}h + 1013$ geeft $p = -\frac{1}{30}h + 1013$

$$\frac{1}{30}h = 1013 - p$$
$$h = 30390 - 30p$$

19 Substitutie van $v = 2{,}39 \cdot (T+4)^{\frac{3}{2}}$ in $F = \left(\frac{v}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$ geeft

$$F = \left(\frac{2{,}39 \cdot (T+4)^{\frac{3}{2}}}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$F = \left(\frac{2{,}39}{6{,}3}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left((T+4)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} - 2$$

$$F = 0{,}379...^{\frac{2}{3}} \cdot (T+4) - 2$$
$$F = 0{,}524... \cdot (T+4) - 2$$
$$F = 0{,}524...T + 2{,}096... - 2$$
$$F = 0{,}524...T + 0{,}096...$$

Dus $a \approx 0{,}52$ en $b \approx 0{,}10$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 154

20 $A = 3{,}0 \cdot h$
$P = 3{,}0 + 2h$

$Q = 1{,}0$ geeft $0{,}73 \cdot \dfrac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}} = 1{,}0$

$A = 3{,}0 \cdot h$ en $P = 3{,}0 + 2h$ substitueren in $0{,}73 \cdot \dfrac{A^{\frac{5}{3}}}{P^{\frac{2}{3}}} = 1{,}0$ geeft $0{,}73 \cdot \dfrac{(3{,}0h)^{\frac{5}{3}}}{(3{,}0 + 2h)^{\frac{2}{3}}} = 1{,}0$.

Voer in $y_1 = 0{,}73 \cdot \dfrac{(3{,}0x)^{\frac{5}{3}}}{(3{,}0 + 2x)^{\frac{2}{3}}}$ en $y_2 = 1{,}0$.

Intersect geeft $x = 0{,}7325...$
Dus de waterhoogte is 73 cm.

Bladzijde 155

21 n is evenredig met V, dus $\left.\begin{array}{l} n = c \cdot V \\ n = 500 \text{ en } V = 320\pi \end{array}\right\} \begin{array}{l} 320\pi c = 500 \\ c = \dfrac{500}{320\pi} \end{array}$

Dus $n = \dfrac{500}{320\pi} \cdot \left(\frac{5}{2}\pi d^2 - 40\pi\right) = \frac{125}{32}d^2 - \frac{500}{8} = \frac{125}{32}d^2 - \frac{2000}{32} = \dfrac{125d^2 - 2000}{32}$.

22 **a** Bij 9,5 m/s is de energieopbrengst $\left(\dfrac{9{,}5}{10}\right)^3 = 0{,}95^3 = 0{,}857...$ keer zo groot als de energieopbrengst bij 10 m/s.
De gevraagde daling is dus 14%.

b Voor de factor a geldt $a^3 = 2$, dus $a = \sqrt[3]{2} = 1{,}259...$
De toename moet dus 26% zijn.

Bladzijde 156

23 $\left.\begin{array}{l} W = a \cdot L^b \\ L = 30 \text{ en } W = 0{,}12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 30^b = 0{,}12 \\ a = \dfrac{0{,}12}{30^b} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} W = a \cdot L^b \\ L = 70 \text{ en } W = 1{,}51 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 70^b = 1{,}51 \\ a = \dfrac{1{,}51}{70^b} \end{array}$

Voer in $y_1 = \dfrac{0{,}12}{30^x}$ en $y_2 = \dfrac{1{,}51}{70^x}$.
Intersect geeft $x = 2{,}988...$ en $y = 4{,}617 \cdot 10^{-6}$.
Dus $a \approx 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ en $b \approx 3{,}0$.

12.2 Differentiaalrekening

12

Bladzijde 157

24 Het differentiequotiënt is $\dfrac{f(2\pi + 0{,}001) - f(2\pi)}{0{,}001} = \dfrac{(2\pi + 0{,}001) \cdot \sin(2\pi + 0{,}001) - 0}{0{,}001} = 6{,}284...$
De gevraagde helling is dus 6,28.

Bladzijde 158

25 $f(x) = -x^3 + 4x$ geeft $f'(x) = -3x^2 + 4$

$g(x) = 1 - \dfrac{1}{(ax + 1)^2} = 1 - (ax + 1)^{-2}$ geeft $g'(x) = a \cdot 2(ax + 1)^{-3} = \dfrac{2a}{(ax + 1)^3}$

$f'(0) = 0 + 4 = 4$ en $g'(0) = \dfrac{2a}{(0 + 1)^3} = 2a$

De raaklijnen staan in de oorsprong loodrecht op elkaar, dus $f'(0) \cdot g'(0) = -1$
$4 \cdot 2a = -1$
$8a = -1$
$a = -\frac{1}{8}$

© Noordhoff Uitgevers bv

26 **a** $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ geeft $x_{\text{top}} = -\dfrac{-\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{8}} = 1$

$f(1) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 2 = 1\frac{7}{8}$, dus top$\left(1, 1\frac{7}{8}\right)$.
$g(x) = -x^2$ heeft top $(0, 0)$.

De afstand tussen de toppen is $\sqrt{(1-0)^2 + \left(1\frac{7}{8} - 0\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{225}{64}} = \sqrt{\frac{289}{64}} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$.

b $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + 2$ geeft $f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$
$\text{rc}_k = f'(-2) = -\frac{3}{4}$
$\left.\begin{array}{l}\text{rc}_k \cdot \text{rc}_l = -1 \\ \text{rc}_k = -\frac{3}{4}\end{array}\right\}\ \text{rc}_l = \frac{4}{3}$
$g(x) = -x^2$ geeft $g'(x) = -2x$
$g'(x) = \frac{4}{3}$
$-2x = \frac{4}{3}$
$x = -\frac{2}{3}$
$g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9}$, dus $B\left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{9}\right)$.

Bladzijde 159

27 $f(x) = \sqrt{4x - 12}$ geeft $f'(x) = 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4x - 12}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 12}}$

$f'(x) = 2$ geeft $\dfrac{2}{\sqrt{4x - 12}} = 2$
$\sqrt{4x - 12} = 1$
$4x - 12 = 1$
$4x = 13$
$x = 3\frac{1}{4}$

$f\left(3\frac{1}{4}\right) = \sqrt{4 \cdot 3\frac{1}{4} - 12} = \sqrt{1} = 1$, dus het raakpunt is $\left(3\frac{1}{4}, 1\right)$.

$\left.\begin{array}{l}y = 2x + b \\ \text{door } \left(3\frac{1}{4}, 1\right)\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}2 \cdot 3\frac{1}{4} + b = 1 \\ 6\frac{1}{2} + b = 1 \\ b = -5\frac{1}{2}\end{array}$

Dus de lijn heeft de vergelijking $y = 2x - 5\frac{1}{2}$.

28 **a** $G_1(8) = 2(8-4)^2 = 2 \cdot 16 = 32$ en $G_2(8) = -2(8-12)^2 + 64 = -2 \cdot 16 + 64 = 32$
Dus aan de eerste voorwaarde is voldaan.
$G_1(t) = 2(t-4)^2$ geeft $G_1'(t) = 4(t-4)$
$G_2(t) = -2(t-12)^2 + 64$ geeft $G_2'(t) = -4(t-12)^2$
$G_1'(8) = 4(8-4) = 16$ en $G_2'(8) = -4(8-12) = 16$
Dus aan de tweede voorwaarde is voldaan.

b Voor grote t is $G_3(t) = \dfrac{80t - 1184}{4t - 61} \approx \dfrac{80t}{4t} = 20$.
Dus de grenswaarde is 20 ganzen per km^2.

Bladzijde 160

29 **a** $f(x) = \dfrac{1}{(4x+3)^2} = (4x+3)^{-2}$ geeft $f'(x) = 4 \cdot -2 \cdot (4x+3)^{-3} = \dfrac{-8}{(4x+3)^3}$

b $a = f'(1) = \dfrac{-8}{(4+3)^3} = -\frac{8}{343}$

$\left.\begin{array}{l}y = -\frac{8}{343}x + b \\ \text{door } A\left(1, \frac{1}{49}\right)\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}-\frac{8}{343} + b = \frac{1}{49} \\ b = \frac{1}{49} + \frac{8}{343} = \frac{15}{343}\end{array}$

Dus $a = -\frac{8}{343}$ en $b = \frac{15}{343}$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

30 $f(x) = (x + 2)\sqrt{x + 2} = (x + 2)^{1\frac{1}{2}}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2}(x + 2)^{\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x + 2}$
$f'(x) = 6$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x + 2} = 6$

$$\sqrt{x + 2} = 4$$
$$x + 2 = 16$$
$$x = 14$$

Dus de x-coördinaat van C is 14.

Bladzijde 161

31 **a** $AD = y_A = f(a) = 6a - a^2$
$CD = x_C - x_D = 6 - a - a = 6 - 2a$
$S = CD \cdot AD = (6 - 2a)(6a - a^2)$

b $S = (6 - 2a)(6a - a^2) = 36a - 6a^2 - 12a^2 + 2a^3 = 2a^3 - 18a^2 + 36a$ geeft $S' = 6a^2 - 36a + 36$
$S' = 0$ geeft $6a^2 - 36a + 36 = 0$

$$a^2 - 6a + 6 = 0$$
$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12$$
$$a = \frac{6 - \sqrt{12}}{2} \vee a = \frac{6 + \sqrt{12}}{2}$$
$$a = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} \vee a = \frac{6 + 2\sqrt{2}}{2}$$
$$a = 3 - \sqrt{3} \vee a = 3 + \sqrt{3}$$

vold. vold. niet

Dus de oppervlakte is maximaal voor $a = 3 - \sqrt{3}$.

32 $f(x) = (x + 1)(x^2 - 16) = x^3 + x^2 - 16x - 16$ geeft $f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$
$f'(x) = 0$ geeft $3x^2 + 2x - 16 = 0$

$$D = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot -16 = 196$$
$$x = \frac{-2 - 14}{6} \vee x = \frac{-2 + 14}{6}$$
$$x = -2\tfrac{2}{3} \vee x = 2$$

$f(2) = (2 + 1)(4 - 16) = -36$
Dus de top is het punt $(2, -36)$.

33 $g(x) = x\sqrt{x} - 18\sqrt{x} = x^{1\frac{1}{2}} - 18\sqrt{x}$ geeft $g'(x) = 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - 18 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x}}$
$g'(x) = 0$ geeft $1\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{9}{\sqrt{x}} = 0$

$$1\tfrac{1}{2}\sqrt{x} = \frac{9}{\sqrt{x}}$$
$$1\tfrac{1}{2}x = 9$$
$$x = 6$$

Dus het minimum wordt aangenomen voor $x = 6$.

34 **a** $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AP = \frac{1}{2} \cdot a \cdot f(a)$

Dit geeft $O(\triangle OAB) = \frac{1}{2}a\left(\frac{2}{a - 2} + 4\right) = \frac{a}{a - 2} + 2a = \frac{a}{a - 2} + \frac{2a(a - 2)}{a - 2} = \frac{a + 2a^2 - 4a}{a - 2} = \frac{2a^2 - 3a}{a - 2}$.

b Voer in $y_1 = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$.
De optie minimum geeft $x = 3$ en $y = 9$.
Dus de minimale oppervlakte is 9 voor $a = 3$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 162

35 $f(x) = (x^2 - 11x + 28)\sqrt{x} = (x^2 - 11x + 28) \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{2\frac{1}{2}} - 11x^{1\frac{1}{2}} + 28x^{\frac{1}{2}}$ geeft

$f'(x) = 2\frac{1}{2}x^{1\frac{1}{2}} - 16\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + 28 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0$ geeft $2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}} = 0$

Voer in $y_1 = 2\frac{1}{2}x\sqrt{x} - 16\frac{1}{2}\sqrt{x} + \frac{14}{\sqrt{x}}$.

De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 1$ en $x = 5{,}6$.

$x_A = 1$ geeft $y_A = f(1) = (1 - 11 + 28)\sqrt{1} = 18$

36 **a** $O = (2l + 2h)(b + h) = 2bl + 2hl + 2bh + 2h^2$

b $\left.\begin{array}{l} b + h = 50 \text{ ofwel } h = 50 - b \\ 2l + 2h = 120 \end{array}\right\}$ $2l + 2(50 - b) = 120$

$2l + 100 - 2b = 120$

$2l = 20 + 2b$

$l = 10 + b$

$I = l \cdot b \cdot h = (10 + b) \cdot b \cdot (50 - b) = b(b + 10)(50 - b)$

c $I = b(b + 10)(50 - b) = b(50b - b^2 + 500 - 10b) = -b^3 + 40b^2 + 500b$

$I = -b^3 + 40b^2 + 500b$ geeft $\frac{dI}{db} = -3b^2 + 80b + 500$

$\frac{dI}{db} = 0$ geeft $-3b^2 + 80b + 500 = 0$

$3b^2 - 80b - 500 = 0$

$D = (-80)^2 - 4 \cdot 3 \cdot -500 = 12\,444$

$b = \frac{80 - \sqrt{12\,444}}{6} \vee b = \frac{80 + \sqrt{12\,444}}{6}$

$b = -5{,}25... \vee b = 31{,}92...$

vold. niet vold.

$b = 31{,}92...$ geeft $I = -3 \cdot 31{,}92...^3 + 40 \cdot 31{,}92...^2 + 500 \cdot 31{,}92... = 24\,192{,}58...$

Dus de maximale inhoud is 24 193 cm^3.

Bladzijde 163

37 $D = \frac{6{,}0}{v^2} + 0{,}00050v^2 - 0{,}033 = 6{,}0v^{-2} + 0{,}00050v^2 - 0{,}033$ geeft

$\frac{dD}{dv} = -12{,}0v^{-3} + 0{,}0010v = -\frac{12{,}0}{v^3} + 0{,}0010v$

$\frac{dD}{dv} = 0$ geeft $-\frac{12{,}0}{v^3} + 0{,}0010v = 0$

$0{,}0010v = \frac{12{,}0}{v^3}$

$0{,}0010v^4 = 12{,}0$

$v^4 = \frac{12{,}0}{0{,}0010} = 12\,000$

$v = \sqrt[4]{12\,000}$

$v = 10{,}46...$

Dus de kruissnelheid is 10,5 m/s.

38 $g(x) = x - \frac{1}{6}x^3$ geeft $g'(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$

$g'(x) = 0$ geeft $1 - \frac{1}{2}x^2 = 0$

$x^2 = 2$

$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2}$

vold. vold. niet

max. is $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - \frac{1}{6}(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} - \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

Dus de mogelijke waarden zijn $a = \frac{2}{3}$ en $b = 2$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

12.3 Exponenten en logaritmen

Bladzijde 166

39 **a** 90% doorlaten per mm geeft $g = 0{,}9$ per mm.

$g^d = 0{,}5$ geeft $0{,}9^d = 0{,}5$

$d = {}^{0{,}9}\log(0{,}5) = 6{,}577...$

Dus een dikte van 6,6 mm laat 50% van het licht door.

b 15% opgenomen, dus 85% doorgelaten.

Dit geeft $\frac{L_{\text{uit}}}{L_{\text{in}}} = 0{,}85$

$10^{-E} = 0{,}85$

$-E = \log(0{,}85)$

$E = -\log(0{,}85) = 0{,}0705...$

Dus de extinctie van de ruit is 0,07.

c $\frac{L_{\text{uit}}}{L_{\text{in}}} = 0{,}75$ geeft $10^{-E} = 0{,}75$

$$\left.\begin{array}{l} -E = \log(0{,}75) \\ E = -\log(0{,}75) \\ d = 6 \\ E = 0{,}1 \cdot C \cdot d \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0{,}1 \cdot C \cdot 6 = -\log(0{,}75) \\ C = \frac{-\log(0{,}75)}{0{,}6} \\ C = 0{,}208... \end{array}$$

Dus de concentratie absorberende stof is 0,2 mol/liter.

Bladzijde 167

40 De tijdsintervallen in de tabel zijn gelijk.

$\frac{1{,}0}{0{,}5} = 2$, $\frac{2{,}0}{1{,}0} = 2$ en $\frac{4{,}0}{2{,}0} = 2$

Alle quotiënten zijn gelijk, dus $Z = b \cdot g^T$ met $g_{5\text{ graden}} = 2$.

$g_{5\text{ graden}} = 2$ geeft $g_{1\text{ graad}} = 2^{\frac{1}{5}} = 1{,}148...$

$$\left.\begin{array}{l} Z = b \cdot 2^{\frac{1}{5}T} \\ T = 5 \text{ en } Z = 0{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} b \cdot 2^1 = 0{,}5 \\ b = 0{,}25 \end{array}$$

De formule is $Z = 0{,}25 \cdot 2^{\frac{1}{5}T}$ ofwel $Z = 0{,}25 \cdot 1{,}15^T$.

41 **a** $L = 29$ geeft $C = \frac{52{,}7}{1 + 179 \cdot 0{,}693^{29}} = 52{,}47...$

52,47... mL/uur = 52,47... · 24 mL/dag = 1259,3... mL/dag = 1,25... L/dag

Dit is meer dan 1 liter, de bewering klopt dus.

b Voor grote L is $0{,}693^L \approx 0$, dus $C \approx \frac{52{,}7}{1 + 179 \cdot 0} = 52{,}7$.

De grafiek heeft dus een horizontale asymptoot, de lijn $C = 52{,}7$.

Bladzijde 168

42 **a** Aflezen geeft dat de bedoelde lijn door de punten (1880, 290) en (1900, 294) gaat.

De richtingscoëfficiënt is dus $\frac{294 - 290}{1900 - 1880} = \frac{4}{20} = 0{,}2$.

In de periode 1900-2000 is de toename volgens dit model $100 \cdot 0{,}2 = 20$ ppm.

Aflezen geeft voor 2000 dat $C = 370$, dus een toename van $370 - 294 = 76$ ppm.

De voorspelde toename is dus $76 - 20 = 56$ ppm te klein.

Alternatieve uitwerking

Teken op het werkblad de lijn door de punten (1880, 290) en (1900, 294) en lees af dat deze lijn door het punt (2000, 314) gaat.

De gegeven grafiek gaat door het punt (2000, 370).

De voorspelde toename is dus $370 - 314 = 56$ te klein.

b In 2000 is de menselijke component $370 - 285 = 85$ ppm.

$g_{70\text{ jaar}} = \frac{85}{15} = 5{,}66...$, dus $g_{10\text{ jaar}} = 5{,}66...^{\frac{10}{70}} = 1{,}281...$

Dus de procentuele toename per 10 jaar is 28%.

© Noordhoff Uitgevers bv

c De vergelijking $15 \cdot 1{,}025^t = 285$ moet worden opgelost.
$15 \cdot 1{,}025^t = 285$
$1{,}025^t = 19$
$t = {}^{1{,}025}\log(19)$
$t = 119{,}2...$
$t = 119{,}2$ valt in het jaar 2049.

Bladzijde 169

43 **a** $g^{11} = 2$ geeft $g = 2^{\frac{1}{11}} = 1{,}0650...$
Dus de jaarlijkse groei is 6,5%.

b $500 \cdot 1{,}034^t = 750$
$1{,}034^t = \frac{750}{500}$
$1{,}034^t = 1{,}5$
$t = {}^{1{,}034}\log(1{,}5) = 12{,}12...$
Bij $t = 12{,}12...$ hoort 1993.
Dus in 1993 passeerde de totale hoeveelheid verbruikte olie de grens van 750 miljard vaten.

c $\frac{2400}{1 + 56 \cdot 0{,}95^t} = 1200$ (Deze vergelijking mag ook grafisch-numeriek worden opgelost.)
$1200(1 + 56 \cdot 0{,}95^t) = 2400$
$1 + 56 \cdot 0{,}95^t = 2$
$56 \cdot 0{,}95^t = 1$
$0{,}95^t = \frac{1}{56}$
$t = {}^{0{,}95}\log\left(\frac{1}{56}\right) = 78{,}47...$
$t = 78{,}47...$ valt in het jaar $1930 + 78 = 2008$.
Dus in het jaar 2008 is de geschatte voorraad voor de helft verbruikt.

Bladzijde 172

44 **a** $\log(843) \approx 2{,}926$
aflezen $\log(p) = 2{,}926$ geeft $h \approx 4600$
Dus een hoogte van 4600 feet.
De formule geeft $h = 30\,390 - 30 \cdot 843 = 5100$.
Het verschil is dus 500 feet.

b De vergelijking $30\,390 - 30p = 61\,500(3{,}00 - \log(p))$ moet worden opgelost
Voer in $y_1 = 30\,390 - 30x$ en $y_2 = 61\,500(3{,}00 - \log(x))$.
Intersect geeft $x = 717{,}7...$ en $y = 8856{,}8...$
De gevraagde luchtdruk is 718 mbar.

c $61\,500(3{,}00 - \log(p)) = 0$
$3{,}00 - \log(p) = 0$
$\log(p) = 3$
$p = 1000$
$61\,500(3{,}00 - \log(p)) = 1000$
$3{,}00 - \log(p) = \frac{1000}{61\,500}$
$3{,}00 - \log(p) = 0{,}0162...$
$\log(p) = 2{,}9837...$
$p = 963{,}2...$
$\frac{963{,}2... - 1000}{1000} = -0{,}0367...$
Dus een afname van 3,7%.

Bladzijde 173

45 $\log(W) = 0{,}075N + 0{,}4$
$W = 10^{0{,}075N + 0{,}4}$
$W = 10^{0{,}075N} \cdot 10^{0{,}4}$
$W = (10^{0{,}075})^N \cdot 10^{0{,}4}$
$W \approx 2{,}5 \cdot 1{,}2^N$
Dus $b = 2{,}5$ en $g = 1{,}2$.

© Noordhoff Uitgevers bv

46 $\log(W) = -5{,}5 + 3{,}1 \cdot \log(L)$
$\log(W) = \log(10^{-5{,}5}) + \log(L^{3{,}1})$
$\log(W) = \log(10^{-5{,}5} \cdot L^{3{,}1})$
$W = 10^{-5{,}5} \cdot L^{3{,}1}$

47 **a** ${}^3\log(4x + 3) = 0$
$4x + 3 = 1$
$4x = -2$
$x = -\frac{1}{2}$
Dus $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.
$f(0) = {}^3\log(3) = 1$
Dus $B(0, 1)$.
Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{1 - 0}{0 - -\frac{1}{2}} = 2$.
$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(0, 1) \end{array}\right\}$ l: $y = 2x + 1$

b Voer in $y_1 = {}^3\log(4x + 3)$.
De GR geeft $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 0{,}520...$
Dus de helling is 0,52.

48 **a** $x^2 - x = 0$
$x(x - 1) = 0$
$x = 0 \vee x = 1$
De verticale asymptoten zijn de lijnen $x = 0$ en $x = 1$.

b $f(x) = 0$ geeft ${}^2\log(x^2 - x) = 0$
$x^2 - x = 1$
$x^2 - x - 1 = 0$
$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1 = 5$
$x = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$
$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} \vee x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$
$AB = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \sqrt{5}$

c $g(x) = 2 \cdot f(x) = 2 \cdot {}^2\log(x^2 - x) = {}^2\log(x^2 - x)^2 = {}^2\log(x(x - 1))^2 = {}^2\log(x^2(x - 1)^2) =$
${}^2\log(x^2(x^2 - 2x + 1))$

12.4 Goniometrie

Bladzijde 176

49 **a** De evenwichtsstand is $\dfrac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$, dus $a = \frac{1}{2}$.
De amplitude is y_{top} − evenwichtsstand $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, dus $b = \frac{1}{2}$.
De halve periode is $\frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi$, dus de periode is π en dit geeft $c = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$.
Stijgend door de evenwichtsstand voor $x = \dfrac{0 + \frac{1}{2}\pi}{2} = \frac{1}{4}\pi$, dus $d = \frac{1}{4}\pi$.

b $(\sin(x))^2 = \frac{1}{4}$
$\sin(x) = \frac{1}{2} \vee \sin(x) = -\frac{1}{2}$
$x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
x op $[-\pi, 2\pi]$ geeft
$x = -\frac{5}{6}\pi \vee x = -\frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{1}{6}\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi \vee x = 1\frac{1}{6}\pi \vee x = 1\frac{5}{6}\pi$.

50 Twee opeenvolgende toppen zijn (1, 1) en (4, 4).
De evenwichtsstand is $\dfrac{1 + 4}{2} = 2\frac{1}{2}$, dus $a = 2\frac{1}{2}$.
De amplitude is $4 - 2\frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$, dus $b = 1\frac{1}{2}$.
De periode is $2 \cdot (4 - 1) = 6$, dus $c = \dfrac{2\pi}{6} = \frac{1}{3}\pi\ (\approx 1{,}05)$.
Een hoogste punt is (4, 4), dus $d = 4$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 177

51 **a** $f(x) = 0$
$(\sin(x) \cdot \cos(x))^2 = 0$
$\sin(x) \cdot \cos(x) = 0$
$\sin(x) = 0 \vee \cos(x) = 0$
$x = k \cdot \pi \vee x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$
x op $[0, \pi]$ geeft $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}\pi \vee x = \pi$.

b Voer in $y_1 = (\sin(x) \cdot \cos(x))^2$
De optie minimum geeft $x = 0$ en $y = 0$.
De optie maximum geeft $x = 0{,}785...$ en $y = 0{,}25$.
De evenwichtsstand is $\frac{0 + 0{,}25}{2} = 0{,}125$, dus $a = 0{,}125$.
De amplitude is y_{max} − evenwichtsstand $= 0{,}25 - 0{,}125 = 0{,}125$, dus $b = 0{,}125$.
De periode is $\frac{1}{2}\pi - 0 = \frac{1}{2}\pi$ (zie vraag a), dus $c = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = 4$.

52 **a** $f(x) = 0$ geeft $2 - 4\sin(2x) = 0$
$-4\sin(2x) = -2$
$\sin(2x) = \frac{1}{2}$
$2x = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 2x = \frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot \pi \vee x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot \pi$
x op $[-\frac{1}{2}\pi, \pi]$ geeft $x = \frac{1}{12}\pi \vee x = \frac{5}{12}\pi$.
Dus de x-coördinaten zijn $x_A = \frac{1}{12}\pi$ en $x_B = \frac{5}{12}\pi$.

b $f(0) = 2 - 4\sin(0) = 2 - 4 \cdot 0 = 2$, dus $C(0, 2)$.
$f(x)$ is maximaal $2 - -4 = 6$ als $\sin(2x)$ minimaal is.
Dat is het geval als $2x = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$$x = \tfrac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$$

Dus $D(\frac{3}{4}\pi, 6)$.
Stel l: $y = ax + b$ met $a = \frac{6 - 2}{\frac{3}{4}\pi - 0} = \frac{4}{\frac{3}{4}\pi} = \frac{16}{3\pi}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{16}{3\pi}x + b \\ \text{door } C(0, 2) \end{array}\right\} y = \frac{16}{3\pi}x + 2$$

l: $y = \frac{16}{3\pi}x + 2$ snijden met de x-as geeft $\frac{16}{3\pi}x + 2 = 0$
$16x + 6\pi = 0$
$16x = -6\pi$
$x = -\frac{6\pi}{16} = -\frac{3}{8}\pi$

Dus de x-coördinaat van E is $-\frac{3}{8}\pi$.

53 **a** $f(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi)$ heeft beginpunt $(\frac{1}{10}\pi, 0)$.
$g(x) = 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$ heeft beginpunt $(-\frac{1}{10}\pi, 0)$.
Een mogelijke verschuiving is de translatie $\frac{1}{10}\pi - -\frac{1}{10}\pi = \frac{2}{10}\pi = \frac{1}{5}\pi$ naar links.
Een mogelijke waarde van m is dus $\frac{1}{5}\pi$.

b $v(x) = f(x) - g(x) = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi) - 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$
Voer in $y_1 = 4\sin(x - \frac{1}{10}\pi) - 4\sin(x + \frac{1}{10}\pi)$.
De optie minimum geeft $x = 0$ en $y = -2{,}472...$
De optie maximum geeft $x = 3{,}141...$ en $y = 2{,}472...$
De evenwichtsstand is $\frac{-2{,}472... + 2{,}472...}{2} = 0$, dus $a = 0$.
De amplitude is y_{max} − evenwichtsstand $= 2{,}472... - 0 = 2{,}472...$, dus $b \approx 2{,}47$.
De periode is $2 \cdot (3{,}141... - 0) = 6{,}283...$, dus $c = \frac{2\pi}{6{,}283...} = 1$.
Een beginpunt is $\left(\frac{0 + 3{,}141...}{2}; 0\right) = (1{,}570...; 0)$, dus $d \approx 1{,}57$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

12.5 Meetkunde

Bladzijde 179

54 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle ABC)$

$$AC^2 = 109^2 + 25^2 - 2 \cdot 109 \cdot 25 \cdot \cos(127°)$$
$$AC^2 = 15\,785{,}89...$$
$$AC = 125{,}64...$$

Dus de afstand is 126 meter.

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\dfrac{BC}{\sin(\angle BAC)} = \dfrac{AC}{\sin(\angle ABC)}$

$$\frac{25}{\sin(\angle BAC)} = \frac{125{,}64...}{\sin(127°)}$$
$$\sin(\angle BAC) = \frac{25\sin(127°)}{125{,}64...}$$
$$\angle BAC = 9{,}14...°$$

Dus de koers is $163° - 9{,}14...° \approx 154°$.

55 **a** In $\triangle APE$ geldt $\tan\left(\frac{1}{2}\alpha\right) = \dfrac{EP}{AP}$

$$\tan(25°) = \frac{EP}{1}$$
$$EP = \tan(25°)$$

$O(APED) = 2 \cdot O(\triangle APE) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AP \cdot EP = 1 \cdot 1 \cdot EP = \tan(25°) \approx 0{,}47$

b De cosinusregel in $\triangle ABP$ geeft $BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos(\angle BAP)$

$$0{,}6^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos(\angle BAP)$$
$$2\cos(\angle BAP) = 2 - 0{,}36$$
$$\cos(\angle BAP) = 0{,}82$$
$$\angle BAP = 34{,}91..°$$

Dus $\alpha = 90° - 34{,}91...° \approx 55°$.

Bladzijde 180

56 **a** De sinusregel in $\triangle EHK$ geeft $\dfrac{HK}{\sin(\angle HEK)} = \dfrac{HE}{\sin(\alpha)}$

$$\frac{48}{\sin(\angle HEK)} = \frac{69}{\sin(100°)}$$
$$\sin(\angle HEK) = \frac{48\sin(100°)}{69}$$
$$\angle HEK = 43{,}24...°$$

Dus $\angle HEK \approx 43°$.

b De cosinusregel in $\triangle EHK$ geeft $HE^2 = HK^2 + EK^2 - 2 \cdot HK \cdot EK \cdot \cos(\alpha)$

$$88^2 = 48^2 + 42^2 - 2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(\alpha)$$
$$2 \cdot 48 \cdot 42 \cdot \cos(\alpha) = 48^2 + 42^2 - 88^2$$
$$4032\cos(\alpha) = -3676$$
$$\cos(\alpha) = \frac{-3676}{4032}$$
$$\alpha = 155{,}74...°$$

Dus $\alpha \approx 156°$.

c $\alpha = 100°$ geeft $HE = \sqrt{3625 - 3600\cos(100°)} = 65{,}19...$

$\alpha = 180°$ geeft $HE = \sqrt{3625 - 3600\cos(180°)} = 85$

$\dfrac{85 - 65{,}19...}{0{,}70} = 28{,}29...$

Dus de gemiddelde snelheid is 28 cm per seconde.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

57 **a** $r = 9$, $s = 2\frac{1}{4}$ en $t = 1$ geeft $MN = 9 + 2\frac{1}{4} = 11\frac{1}{4}$, $MT = 9 + 1 = 10$ en $NT = 2\frac{1}{4} + 1 = 3\frac{1}{4}$.
De cosinusregel in $\triangle MNT$ geeft $MN^2 = MT^2 + NT^2 - 2 \cdot MT \cdot NT \cdot \cos(\angle MTN)$

$$\left(11\tfrac{1}{4}\right)^2 = 10^2 + \left(3\tfrac{1}{4}\right)^2 - 2 \cdot 10 \cdot 3\tfrac{1}{4} \cdot \cos(\angle MTN)$$
$$65\cos(\angle MTN) = -16$$
$$\cos(\angle MTN) = -\tfrac{16}{65}$$
$$\angle MTN = 104{,}25...^\circ$$

Dus $\angle MTN \approx 104^\circ$.

b $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{s}} \\ r = s = 2\end{array}\right\} \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$2\sqrt{t} = \sqrt{2}$$
$$\sqrt{t} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$t = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}$$

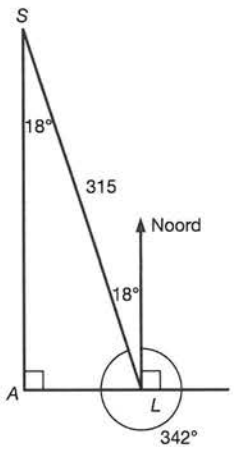
c $r = s = 2$ en $t = \frac{1}{2}$ geeft $M(0, 2)$, $N(4, 2)$ en $T\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Neem in $\triangle MNT$ als basis MN, dan is de hoogte $2 - \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Dus $O(\triangle MNT) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1\frac{1}{2} = 3$.

Bladzijde 181

58 **a** Zie de figuur hiernaast.



$360^\circ - 342^\circ = 18^\circ$, dus $\angle S = 18^\circ$ (Z-hoeken)

$$\sin(\angle S) = \frac{AL}{LS}$$
$$\sin(18^\circ) = \frac{AL}{315}$$
$$AL = 315\sin(18^\circ) = 97{,}34...$$
$$\cos(\angle S) = \frac{AS}{LS}$$
$$\cos(18^\circ) = \frac{AS}{315}$$
$$AS = 315\cos(18^\circ) = 299{,}58...$$
$$299{,}58... + 97{,}34... - 315 = 81{,}92...$$

De vliegafstand is ongeveer 80 km langer.

b Noem het punt waar het vliegtuig van koers verandert B.
$\angle BLS = 342^\circ - 310^\circ = 32^\circ$
De cosinusregel in $\triangle BLS$ geeft $BS^2 = BL^2 + LS^2 - 2 \cdot BL \cdot LS \cdot \cos(\angle BLS)$

$$BS^2 = 300^2 + 315^2 - 2 \cdot 300 \cdot 315 \cdot \cos(32^\circ)$$
$$BS^2 = 28\,943{,}90...$$
$$BS = 170{,}12...$$

$$\frac{300 + 170{,}12... - 315}{300 + 170{,}12...} \cdot 100\% = 32{,}99...\%$$

Het gevraagde percentage is 33%.

Bladzijde 182

59 De cosinusregel in $\triangle ABD$ geeft $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos(\angle ABD)$

$$17{,}7^2 = 20{,}0^2 + 13{,}0^2 - 2 \cdot 20{,}0 \cdot 13{,}0 \cdot \cos(\angle ABD)$$
$$520\cos(\angle ABD) = 255{,}71$$
$$\cos(\angle ABD) = 0{,}49175$$
$$\angle ABD = 60{,}54...^\circ$$

$\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 153^\circ - 60{,}54...^\circ = 92{,}45...^\circ$
De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos(\angle CBD)$

$$CD^2 = 9{,}1^2 + 13{,}0^2 - 2 \cdot 9{,}1 \cdot 13{,}0 \cdot \cos(92{,}45...^\circ)$$
$$CD^2 = 261{,}94...$$
$$CD = \sqrt{261{,}94...} = 16{,}18...$$

Dus CD is ongeveer 16,2 cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 185

60 **a** Het middelpunt M van c is het midden van PR, dus $M\left(\frac{1+13}{2}, \frac{1+17}{2}\right)$ ofwel $M(7, 9)$.

De straal r van c is de helft van PR, dus $r = \frac{1}{2}\sqrt{(13-1)^2 + (17-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{400} = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$.
Dit geeft c: $(x-7)^2 + (y-9)^2 = 100$.

b $\left.\begin{array}{l}(x-7)^2 + (y-9)^2 = 100 \\ x = 1\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1-7)^2 + (y-9)^2 = 100 \\ 36 + (y-9)^2 = 100 \\ (y-9)^2 = 64 \\ y - 9 = 8 \vee y - 9 = -8 \\ y = 17 \vee y = 1\end{array}$

Dus $S(1, 17)$.

$\text{rc}_{PR} = \frac{17-1}{13-1} = \frac{4}{3}$, dus $\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$.

$\left.\begin{array}{l}y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } S(1, 17)\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}-\frac{3}{4} \cdot 1 + b = 17 \\ b = 17\frac{3}{4}\end{array}$

Dus l: $y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}$.

c Vierhoek $PQRS$ is symmetrisch, dus Q ligt op de lijn l.

l snijden met c geeft $\left.\begin{array}{l}(x-7)^2 + (y-9)^2 = 100 \\ y = -\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(x-7)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 17\frac{3}{4} - 9\right)^2 = 100 \\ (x-7)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}\right)^2 = 100\end{array}$

Voer in $y_1 = (x-7)^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 8\frac{3}{4}\right)^2$ en $y_2 = 100$.
Intersect geeft $x = 16{,}36$ en $y = 5{,}48$.
Dus $Q(16{,}36; 5{,}48)$.

61 **a** c is de cirkel met middelpunt $(4, 5)$ en straal 5.
$d(M, P) = \sqrt{(4-3)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$
$d(P, c) = r - d(M, P) = 5 - \sqrt{5}$

b $\left.\begin{array}{l}(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ y = 0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(x-4)^2 + (0-5)^2 = 25 \\ (x-4)^2 + 25 = 25 \\ (x-4)^2 = 0 \\ x = 4\end{array}$

Dus $A(4, 0)$.

$\left.\begin{array}{l}(x-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ x = 0\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(0-4)^2 + (y-5)^2 = 25 \\ 16 + (y-5)^2 = 25 \\ (y-5)^2 = 9 \\ y - 5 = 3 \vee y - 5 = -3 \\ y = 8 \vee y = 2\end{array}$

Dus $B(0, 2)$ en $C(0, 8)$.

$\text{rc}_k = \frac{3-2}{3-0} = \frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{3}$ geeft $\alpha = 18{,}43...°$

$\text{rc}_l = \frac{0-8}{4-0} = -2$

$\tan(\beta) = -2$ geeft $\beta = -63{,}43...°$

$\alpha - \beta = 18{,}43...° - -63{,}43...° = 81{,}86...°$

Dus $\angle(k, l) \approx 82°$.

62 Snijden van l en c geeft $\left.\begin{array}{l}x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5} \\ y = -4x - 3\frac{3}{4}\end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}x^2 + \left(-4x - 3\frac{3}{4}\right)^2 - 6x + 6\left(-4x - 3\frac{3}{4}\right) = -8\frac{2}{5} \\ x^2 + 16x^2 + 30x + \frac{225}{16} - 6x - 24x - 22\frac{1}{2} = -8\frac{2}{5} \\ 17x^2 = \frac{3}{80}\end{array}$

Hieruit volgt dat er twee snijpunten zijn, dus de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c.

© Noordhoff Uitgevers bv

Alternatieve uitwerking

$x^2 + y^2 - 6x + 6y = -8\frac{2}{5}$
$(x-3)^2 - 9 + (y+3)^2 - 9 = -8\frac{2}{5}$
$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 9\frac{3}{5}$

Dus $M(3, -3)$ en $r = \sqrt{9{,}6}$.
De lijn k staat loodrecht op l en gaat door M.
$\text{rc}_l = -4$, dus $\text{rc}_k = \frac{1}{4}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{4}x + b \\ \text{door } M(3,-3) \end{array}\right\} \frac{1}{4} \cdot 3 + b = -3$$
$$\frac{3}{4} + b = -3$$
$$b = -3\tfrac{3}{4}$$

Dus k: $y = \frac{1}{4}x - 3\frac{3}{4}$.
k en l snijden geeft het snijpunt S.
$\frac{1}{4}x - 3\frac{3}{4} = -4x - 3\frac{3}{4}$

$$4\tfrac{1}{4}x = 0$$
$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \frac{1}{4}x - 3\frac{3}{4} \end{array}\right\} y = -3\tfrac{3}{4}$$

Dus $S\left(0, -3\frac{3}{4}\right)$.

$d(M, l) = d(M, S) = \sqrt{(3-0)^2 + \left(-3 - -3\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{16}} = \sqrt{9{,}5625} < \sqrt{9{,}6}$
Dus de afstand van M tot l is kleiner dan de straal van c.

Bladzijde 186

63 **a** Noem S de projectie van N op de y-as.
$MS = r - s$ en $MN = r + s$
De stelling van Pythagoras in $\triangle MNS$ geeft $NS^2 + MS^2 = MN^2$
$$NS^2 + (r-s)^2 = (r+s)^2$$
$$NS^2 = (r+s)^2 - (r-s)^2$$
$$NS = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$$
Omdat $OQ = NS$ is $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2}$.

b $OQ = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = \sqrt{r^2 + 2rs + s^2 - (r^2 - 2rs + s^2)}$
$= \sqrt{r^2 + 2rs + s^2 - r^2 + 2rs - s^2} = \sqrt{4rs} = 2\sqrt{rs}$
Dus $a = 2$.

c $M(0, 4)$ en $N(2\sqrt{4 \cdot 1}, 1) = N(4, 1)$ geeft $\text{rc}_{MN} = \dfrac{1-4}{4-0} = -\frac{3}{4}$.
Omdat $\text{rc}_l \cdot \text{rc}_{MN} = -1$, is $\text{rc}_l = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

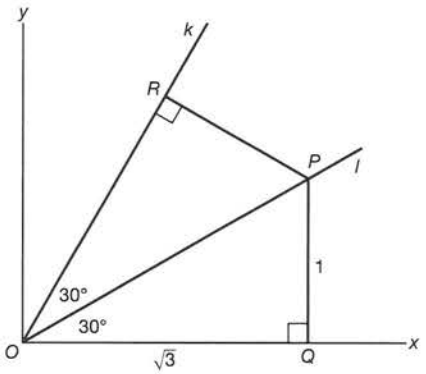
64 $y = 1 + \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$
$y - 1 = \sqrt{-x^2 - 4x + 12}$
kwadrateren geeft
$(y-1)^2 = -x^2 - 4x + 12$
$x^2 + 4x - 12 + (y-1)^2 = 0$
$(x+2)^2 - 4 - 12 + (y-1)^2 = 0$
$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$
Dus het middelpunt is $(-2, 1)$ en de straal is 4.

65 **a** k: $y = \sqrt{3} \cdot x$ geeft $\tan(\alpha) = \sqrt{3}$ ofwel $\alpha = 60°$.
l: $y = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot x$ geeft $\tan(\beta) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ ofwel $\beta = 30°$.
De richtingshoek van m is het gemiddelde van de richtingshoeken van k en l, dus de hoek die m met de x-as maakt is $\dfrac{60° + 30°}{2} = 45°$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

b



Uit vraag a volgt $\angle POR = \alpha - \beta = 60° - 30° = 30°$.
In $\triangle OPQ$ geldt $OP = 2 \cdot 1 = 2$.
In $\triangle OPR$ geldt $PR = \frac{2}{2} = 1$.

$\left.\begin{array}{l} d(P, x\text{-as}) = PQ = 1 \\ d(P, k) = PR = 1 \end{array}\right\}$ dus de afstanden zijn gelijk.

Bladzijde 187

66 **a** $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$
$x^2 - 10x + y^2 - 2y + 21 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + (y - 1)^2 - 1 + 21 = 0$
$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5$
Dus de straal is $\sqrt{5}$.

b De lijn l met richtingscoëfficiënt a gaat door $A(0, -4)$, dus l: $y = ax - 4$.
l snijden met c geeft

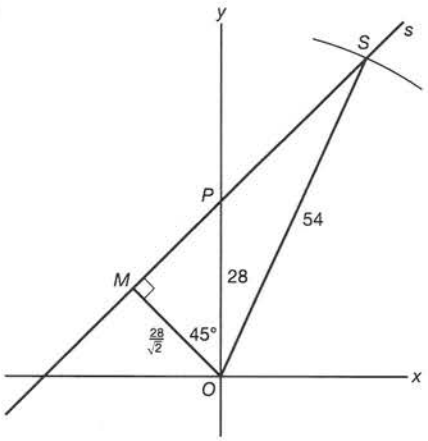
$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 10x - 2y + 21 = 0 \\ y = ax - 4 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x^2 + (ax - 4)^2 - 10x - 2(ax - 4) + 21 = 0 \\ x^2 + a^2x^2 - 8ax + 16 - 10x - 2ax + 8 + 21 = 0 \\ (a^2 + 1)x^2 + (-10a - 10)x + 45 = 0 \end{array}$

Voor raken geldt $D = 0$

$(-10a - 10)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 45 = 0$
$100a^2 + 200a + 100 - 180a^2 - 180 = 0$
$-80a^2 + 200a - 80 = 0$
$2a^2 - 5a + 2 = 0$
$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9$
$a = \frac{5 - 3}{4} \vee a = \frac{5 + 3}{4}$
$a = \frac{1}{2} \vee a = 2$

De grootste richtingscoëfficiënt is 2, dus l: $y = 2x - 4$.

67



© Noordhoff Uitgevers bv

In $\triangle OMP$ geldt $OM = \frac{28}{\sqrt{2}}$.

In $\triangle OMS$ geeft de stelling van Pythagoras $MS^2 = OS^2 - OM^2$

$$MS^2 = 54^2 - \left(\frac{28}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2916 - 392 = 2524$$

$$MS = \sqrt{2524}$$

De afstand binnen het bereik van De Eierland is $2 \cdot MS = 2\sqrt{2524}$.

De tijd die hierbij hoort is $\frac{2\sqrt{2524}}{22} = 4{,}567...$ uur $= 18{,}268...$ kwartier.

Dus het schip is ongeveer 18 kwartier binnen het bereik van De Eierland.

Alternatieve uitwerking

De lijn s heeft richtingscoëfficiënt 1 en gaat door (0, 28), dus s: $y = x + 28$.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 54^2 \\ y = x + 28 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + (x + 28)^2 = 2916 \\ x^2 + x^2 + 56x + 784 = 2916 \\ 2x^2 + 56x - 2132 = 0 \\ x^2 + 28x - 1066 = 0 \\ D = 28^2 - 4 \cdot 1 \cdot -1066 = 5048 \\ x = \frac{-28 - \sqrt{5048}}{2} \vee x = \frac{-28 + \sqrt{5048}}{2} \\ x = -49{,}52... \vee x = 21{,}52... \end{array}$$

$x = -49{,}52...$ geeft $y = -21{,}52...$ en $x = 21{,}52...$ geeft $y = 49{,}52...$

Dus de snijpunten zijn $A(-49{,}52...; -21{,}52...)$ en $B(21{,}52...; 49{,}52...)$.

De afstand tussen de snijpunten is gelijk aan

$\sqrt{(21{,}52... - -49{,}52...)^2 + (49{,}52... - -21{,}52...)^2} = \sqrt{5048 + 5048} = 100{,}47...$

De tijd die hierbij hoort is $\frac{100{,}47...}{22} = 4{,}56...$ uur.

Het schip is dus ongeveer 4 uur en 2 kwartier binnen het bereik van de Eierland.

Bladzijde 188

68 **a** $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 6y - 6x + 27 \\ x = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y^2 = 6y + 27 \\ y^2 - 6y - 27 = 0 \\ (y + 3)(y - 9) = 0 \\ y = -3 \vee y = 9 \end{array}$

Dus $A(0, 9)$.

De straal r_2 van c_2 is $\sqrt{10}$.

$d(A, M_2) = \sqrt{(0 - 9)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{82}$

$d(A, c_2) = d(A, M_2) - r_2 = \sqrt{82} - \sqrt{10}$

b $x^2 + y^2 = 6y - 6x + 27$

$x^2 + 6x + y^2 - 6y = 27$

$(x + 3)^2 - 9 + (y - 3)^2 - 9 = 27$

$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 45$

Dus $M_1(-3, 3)$.

$\text{rc}_l = \frac{0 - 3}{1 - -3} = -\frac{3}{4}$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{3}{4}x + b \\ \text{door } M_2(1, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{3}{4} \cdot 1 + b = 0 \\ b = \frac{3}{4} \end{array}$

Dus l: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

c $r_2 = \sqrt{10}$, dus $Q(1 + \sqrt{10}, 0)$.

$$\text{rc}_k = \frac{0 - -3}{1 + \sqrt{10} - 0} = \frac{3}{1 + \sqrt{10}}$$

$$\text{rc}_k = \tan(\alpha) = \frac{3}{1 + \sqrt{10}} \text{ geeft } \alpha = 35{,}78...°$$

$\text{rc}_l = \tan(\beta) = -\frac{3}{4}$ geeft $\beta = -36{,}86...°$
$\alpha - \beta = 35{,}78...° - -36{,}86...° = 72{,}65...°$
Dus $\angle(k, l) \approx 73°$.

12.6 Eindexamens 2015

1e tijdvak

Bladzijde 189

1 $-0{,}0306x^2 + 56{,}6 = 0$
$-0{,}0306x^2 = -56{,}6$
$x^2 = 1849{,}6...$
$x = 43{,}00... \vee x = -43{,}00...$
$43{,}00... - -43{,}00... = 86{,}01...$
Dus de breedte is 86,0 meter.

2 $x = 0$ geeft $y = 56{,}0$.
Dus de hoogte van de hangar is 56,6 meter.
De oppervlakte van de rechthoek is $86{,}0 \cdot 56{,}6$, dus de oppervlakte van de opening van de hangar is $\frac{2}{3} \cdot 86{,}0 \cdot 56{,}6 = 3245{,}0...$
$175 \cdot 3245{,}0... = 567886{,}6...$
Dus de inhoud van de hangar is 568 000 m^3.

Bladzijde 190

3 Als de Airbus in het midden van de hangar zou staan, dan geldt voor de vleugeluiteinden
$x = \frac{79{,}8}{2} = 39{,}9$ en $x = -39{,}9$.
$x = 39{,}9$ geeft $y = -0{,}036 \cdot 39{,}9^2 + 56{,}6 = 7{,}88...$
Dit is minder dan de benodigde 11,0 meter, de Airbus A380 past dus niet in de lengterichting in de hangar.

4 Voer in $y_1 = \sin(x)(\sin(x) + 2\cos(x))$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = 0$, $x = 2{,}034...$, $x = \pi$, $x = 5{,}176...$ en $x = 2\pi$.
$AB = \pi - 2{,}034... = 1{,}107...$ en $BC = 5{,}176... - \pi = 2{,}034...$
$\frac{BC}{AB} = \frac{2{,}034...}{1{,}107...} = 1{,}837...$
Dus BC is 1,84 keer zo lang als AB.

12

5 De optie maximum geeft $x = 1{,}017...$ en $y = 1{,}618...$ en $x = 4{,}158...$
De optie minimum geeft $x = 2{,}588...$ en $y = -0{,}618...$
De evenwichtsstand is $\frac{1{,}618... - -0{,}618...}{2} = \frac{1}{2}$.
De amplitude is $1{,}618... - \frac{1}{2} = 1{,}118...$
De periode is π, dus $q = \frac{2\pi}{\pi} = 2$
De grafiek gaat stijgend door de evenwichtsstand voor $x = \frac{2{,}588... + 4{,}158...}{2} = 3{,}373...$
Dus mogelijke waarden zijn $p \approx 1{,}12$, $q = 2$, $r \approx 3{,}37$ en $s = \frac{1}{2}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 $\text{rc}_{AB} = \frac{1 - -1}{7 - 5} = \frac{2}{2} = 1$, dus $\text{rc}_l = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -x + b \\ \text{door } B(7, 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -7 + b = 1 \\ b = 8 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} l\colon y = -x + 8 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -x + 8 = 0 \\ x = 8 \end{array}$$

Dus $P(8, 0)$.

$d(P, M) = \sqrt{(8 - 4)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

De straal van de cirkel is $d(M, B) = \sqrt{(7 - 4)^2 + (1 - 2)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$

$d(P, c) = d(P, M) - r = 2\sqrt{5} - \sqrt{10}$.

Bladzijde 191

7 $\text{rc}_{MA} = \frac{-1 - 2}{5 - 4} = \frac{-3}{1} = -3$

$\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71{,}56...°$

Dus de hoek die lijnstuk AM met de x-as maakt is $71{,}56...°$.

De hoek die lijnstuk MS met de x-as maakt is dan $180° - 60° - 71{,}56...° = 48{,}43...°$.

$\tan(48{,}43...°) = 1{,}127...$, dus de helling van lijnstuk MS is ongeveer 1,13.

8 De lijn k staat loodrecht op l en gaat door A.

$\text{rc}_l = -\frac{3}{4}$ geeft $\text{rc}_k = 1\frac{1}{3}$

$$\left.\begin{array}{l} k\colon y = 1\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } A\left(1\frac{2}{3}, 1\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{3} + b = 1 \\ 2\frac{2}{9} + b = 1 \\ b = -1\frac{2}{9} \end{array}$$

$k\colon y = 1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{9}$ snijden met l geeft het snijpunt S.

$1\frac{1}{3}x - 1\frac{2}{9} = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2}$

$2\frac{1}{12}x = 5\frac{13}{18}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\frac{56}{75} \\ y = -\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{2} \end{array}\right\} y = -\frac{3}{4} \cdot 2\frac{56}{75} + 4\frac{1}{2} = 2\frac{11}{25}$$

Dus $S\left(2\frac{56}{75}, 2\frac{11}{25}\right)$.

$d(A, l) = d(A, S) = \sqrt{\left(2\frac{56}{75} - 1\frac{2}{3}\right)^2 + \left(2\frac{11}{25} - 1\right)^2} = \sqrt{1\frac{104}{625} + 2\frac{46}{625}} = 1\frac{4}{5}$

9 $f(x) = \frac{4}{(3x - 1)} = 4(3x - 1)^{-1}$ geeft $f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot -(3x - 1)^{-2} = -\frac{12}{(3x - 1)^2}$

Raaklijn evenwijdig aan l geeft $f'(x) = -\frac{3}{4}$

$$\begin{array}{l} -\frac{12}{(3x - 1)^2} = -\frac{3}{4} \\ 3(3x - 1)^2 = 4 \cdot 12 \\ (3x - 1)^2 = 16 \\ 3x - 1 = -4 \vee 3x - 1 = 4 \\ 3x = -3 \vee 3x = 5 \\ x = -1 \vee x = \frac{5}{3} \end{array}$$

Dus $x_B = -1$.

10 $$\left.\begin{array}{l} I = \frac{P}{4\pi r^2} \\ r = 5 \text{ en } I = 10^{-7} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{P}{4\pi \cdot 5^2} = 10^{-7} \\ P = 10^{-5} \cdot \pi \end{array}$$

Dus $I = \frac{10^{-5} \cdot \pi}{4\pi r^2} = \frac{10^{-5}}{4r^2}$

$r = 1$ geeft $I = \frac{10^{-5}}{4 \cdot 1} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}$

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 192

11 $I_{\text{nieuw}} = 2I$ geeft

$L_{\text{nieuw}} = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot 2I) = 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I \cdot 2) = 10 \cdot (\log(10^{12} \cdot I) + \log(2))$

$= 10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) + 10 \cdot \log(2) = L + 10 \cdot \log(2)$

Dus het geluidsniveau stijgt met $10 \cdot \log(2) \approx 3$ dB.

12 $10 \cdot \log(10^{12} \cdot I) = 80$ geeft $\log(10^{12} \cdot I) = 8$

$10^{12} \cdot I = 10^8$

$I = 0{,}0001$

$$\left.\begin{array}{l} I = \dfrac{P}{4\pi r^2} \\ I = 0{,}0001 \text{ en } P = 30 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{30}{4\pi r^2} = 0{,}0001 \\ 0{,}0004\pi r^2 = 30 \end{array}$$

$$r^2 = \frac{300\,000}{4\pi}$$

$$r = \sqrt{\frac{300\,000}{4\pi}} = 154{,}5...$$

Dus tot een afstand van 155 meter kan gehoorschade ontstaan.

13 $\angle BCQ = 180° - 105° - 50° = 25°$ en $\angle ACQ = 40° - 25° = 15°$

In $\triangle BCQ$ geeft de sinusregel $\dfrac{CQ}{\sin(50°)} = \dfrac{2}{\sin(25°)}$

$$CQ = \frac{2\sin(50°)}{\sin(25°)} = 3{,}625...$$

In $\triangle ACQ$ geeft de sinusregel $\dfrac{3}{\sin(15°)} = \dfrac{3{,}625...}{\sin(\angle CAQ)}$

$$\sin(\angle CAQ) = \frac{3{,}625... \cdot \sin(15°)}{3} = 0{,}312...$$

$\angle CAQ = 18{,}22...°$ vold. $\vee$ $\angle CAQ = 161{,}77...°$ vold. niet

$\angle CQA = 180° - 15° - 18{,}22...° = 146{,}77...°$

In $\triangle ACQ$ geeft de sinusregel $\dfrac{3}{\sin(15°)} = \dfrac{AC}{\sin(146{,}77...°)}$

$$AC = \frac{3\sin(146{,}77...°)}{\sin(15°)} = 6{,}351...$$

Dus $AC \approx 6{,}35$.

14 $2^{\frac{1}{2}x^2 - x} = 16$

$2^{\frac{1}{2}x^2 - x} = 2^4$

$\frac{1}{2}x^2 - x = 4$

$x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x + 2)(x - 4) = 0$

$x = -2 \vee x = 4$

De gevraagde x-coördinaten zijn -2 en 4.

15 $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ is minimaal voor $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$.

Dus het minimum van f is $f(1) = 2^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 193

16 $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ (x + 1)(x - 3) = 0 \\ x = -1 \vee x = 3 \end{array}$

Dus $A(-1, 0)$ en $B(3, 0)$.
$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 3$
$x^2 - 2x + y^2 + 4y = 3$
$(x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = 3$
$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 8$
Dus $M(1, -2)$.
Dit geeft $f(x) = a(x - 1)^2 - 2$.

$\left.\begin{array}{l} y = a(x - 1)^2 - 2 \\ \text{door } A(-1, 0), \text{ dus } f(-1) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a(-1 - 1)^2 - 2 = 0 \\ 4a = 2 \\ a = \frac{1}{2} \end{array}$

Dus $f(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 2$.

2e tijdvak

1 Teken de lijn door (0,4; 0) en (1, 10).
Deze lijn snijdt de rechtergrens ongeveer in het punt (1,5; 18).
Dus de veilige snelheid is Mach 1,5 en de bijbehorende hoogte 18 000 feet.

Bladzijde 194

2 Voer in $y_1 = 60{,}2 \cdot \log(10x)$ en $y_2 = 30$.
Intersect geeft $x = 0{,}315...$
Dus de minimale veilige snelheid is ongeveer Mach 0,3.

3 $h = 33{,}3 \cdot \sqrt{v - 1{,}2}$
$\sqrt{v - 1{,}2} = \dfrac{h}{33{,}3}$
$\sqrt{v - 1{,}2} = 0{,}0300... \cdot h$
$v - 1{,}2 = 0{,}000901... \cdot h^2$
$v = 0{,}000901... \cdot h^2 + 1{,}2$
Dus $v = 0{,}0009h^2 + 1{,}2$.

4 De straal r_1 van c_1 is $\sqrt{16} = 4$.
$x^2 - 10x + y^2 + 16 = 0$
$(x - 5)^2 - 25 + y^2 + 16 = 0$
$(x - 5)^2 + y^2 = 9$
Dus $M(5, 0)$ en de straal r_2 van c_2 is $\sqrt{9} = 3$.
In $\triangle OAM$ geldt $OA^2 + AM^2 = OM^2$, immers $4^2 + 3^2 = 5^2$.
Omdat de stelling van Pythagoras geldt is $\angle OAM = 90°$.

5 De lijn k gaat door M en staat loodrecht op l.

$\text{rc}_l = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}$, dus $\text{rc}_k = \dfrac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$.

$\left.\begin{array}{l} y = 2\sqrt{6} \cdot x + b \\ \text{door } M(5, 0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\sqrt{6} \cdot 5 + b = 0 \\ 10\sqrt{6} + b = 0 \\ b = -10\sqrt{6} \end{array}$

Dus k: $y = 2\sqrt{6} \cdot x - 10\sqrt{6}$.
k snijden met l geeft $2\sqrt{6} \cdot x - 10\sqrt{6} = -\frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot x + \frac{5}{3}\sqrt{6}$

$2\sqrt{6} \cdot x + \frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot x = 1\frac{2}{3}\sqrt{6} + 10\sqrt{6}$
$2\frac{1}{12}\sqrt{6} \cdot x = 11\frac{2}{3}\sqrt{6}$

$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{11\frac{2}{3}\sqrt{6}}{2\frac{1}{12}\sqrt{6}} = 5\frac{3}{5} \\ y = 2\sqrt{6} \cdot x - 10\sqrt{6} \end{array}\right\} y = 2\sqrt{6} \cdot 5\frac{3}{5} - 10\sqrt{6} = 1\frac{1}{5}\sqrt{6}$

Dus $P\left(5\frac{3}{5}, 1\frac{1}{5}\sqrt{6}\right)$.

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 195

6 $f(x) = (x - \sqrt{x})^2 = x^2 - 2x\sqrt{x} + x = x^2 - 2x^{1\frac{1}{2}} + x$ geeft $f'(x) = 2x - 3x^{\frac{1}{2}} + 1 = 2x - 3\sqrt{x} + 1$

7 Snijden van de grafiek van f en de lijn $y = x$ geeft
$$\begin{aligned} &(x - \sqrt{x})^2 = x \\ &x^2 - 2x\sqrt{x} + x = x \\ &x^2 - 2x\sqrt{x} = 0 \\ &x(x - 2\sqrt{x}) = 0 \\ &x = 0 \vee x - 2\sqrt{x} = 0 \\ &x = 0 \vee x = 2\sqrt{x} \end{aligned}$$
kwadrateren geeft
$$\begin{aligned} &x^2 = 4x \\ &x = 0 \vee x = 4 \end{aligned}$$
Dus $x_A = 4$.

8 $\text{rc}_l = f'(4) = 2 \cdot 4 - 3\sqrt{4} + 1 = 8 - 6 + 1 = 3$
$\tan(\alpha) = 3$ geeft $\alpha = 71{,}56...°$
k staat loodrecht op de lijn $y = x$, dus $\text{rc}_k = -1$.
$\tan(\beta) = -1$ geeft $\beta = -45°$
$\alpha - \beta = 71{,}56...° - -45° = 116{,}56...°$
Dus $\angle(k, l) = 180° - 116{,}56...° \approx 63°$.

9 $\left.\begin{array}{l} y = (x - p\sqrt{x})^2 \\ \text{door } (36, 36) \end{array}\right\}$
$$\begin{aligned} &(36 - p \cdot \sqrt{36})^2 = 36 \\ &(36 - 6p)^2 = 36 \\ &36 - 6p = 6 \vee 36 - 6p = -6 \\ &-6p = -30 \vee -6p = -42 \\ &p = 5 \vee p = 7 \end{aligned}$$
Dus de gevraagde waarden van p zijn 5 en 7.

Bladzijde 196

10 $z(1) = 1$ en $z(3) = 2$ geeft $k^2 = 2$ ofwel $k = \sqrt{2}$.

11 $A(n) = 131\,072$ geeft
$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2} \cdot 2^n = 131\,072 \\ &2^n = 262\,144 \\ &n = {}^2\log(262\,144) = 18 \end{aligned}$$

12 $z(n) = \sqrt{A(n)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot 2^n} = \sqrt{\frac{2^n}{2}} = \sqrt{2^{n-1}} = 2^{\frac{n-1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}$

Dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$.

Alternatieve uitwerking

$z(1) = 1$ geeft $2^{a \cdot 1 + b} = 1$, dus $a + b = 0$
$z(3) = 2$ geeft $2^{a \cdot 3 + b} = 2$, dus $3a + b = 1$
$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = 1 \end{cases} -$$
$$-2a = -1$$
$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ a + b = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = 0 \\ b = -\frac{1}{2} \end{array}$$
Dus $a = \frac{1}{2}$ en $b = -\frac{1}{2}$.

Bladzijde 197

13 Van het eerste kwartaal 2005 tot het laatste kwartaal 2008 zijn 15 kwartalen.
$$g^{15} = \frac{144\,000}{365\,000} = 0{,}4044...$$
$g = 0{,}4044...^{\frac{1}{15}} = 0{,}9414...$
Dus het gevraagde percentage is $5{,}85...\% \approx 5{,}9\%$.

14 Afnemende daling, dus toenamediagram II is het passende diagram.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 198

15 $f(x) = 0$ geeft $x \cdot \sin(x) - \sin(x) = 0$

$\sin(x)(x - 1) = 0$

$\sin(x) = 0 \vee x = 1$

$x = k \cdot \pi \vee x = 1$

$x = 1$ geeft het punt P.
$x = \pi$ geeft het punt Q.
$x = 2\pi$ geeft het punt R.
$x = 3\pi$ geeft het punt S.
$x = 4\pi$ geeft het punt T.
$x = 5\pi$ geeft het punt U.
$x = 6\pi$ geeft het punt V.

$x_A = \dfrac{2\pi + 3\pi}{2} = 2\tfrac{1}{2}\pi$

$x_B = \dfrac{4\pi + 5\pi}{2} = 4\tfrac{1}{2}\pi$

16 $f(2\tfrac{1}{2}\pi) = 2\tfrac{1}{2}\pi \cdot \sin(2\tfrac{1}{2}\pi) - \sin(2\tfrac{1}{2}\pi) = 2\tfrac{1}{2}\pi \cdot 1 - 1 = 2\tfrac{1}{2}\pi - 1$

Dus $A(2\tfrac{1}{2}\pi, 2\tfrac{1}{2}\pi - 1)$.

$f(4\tfrac{1}{2}\pi) = 4\tfrac{1}{2}\pi \cdot \sin(4\tfrac{1}{2}\pi) - \sin(4\tfrac{1}{2}\pi) = 4\tfrac{1}{2}\pi \cdot 1 - 1 = 4\tfrac{1}{2}\pi - 1$

Dus $B(4\tfrac{1}{2}\pi, 4\tfrac{1}{2}\pi - 1)$.

Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{4\tfrac{1}{2}\pi - 1 - (2\tfrac{1}{2}\pi - 1)}{4\tfrac{1}{2}\pi - 2\tfrac{1}{2}\pi} = \dfrac{2\pi}{2\pi} = 1$

$\left.\begin{array}{l} y = x + b \\ \text{door } A(2\tfrac{1}{2}\pi, 2\tfrac{1}{2}\pi - 1) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2\tfrac{1}{2}\pi + b = 2\tfrac{1}{2}\pi - 1 \\ b = -1 \end{array}$

Dus l: $y = x - 1$.
$x = 1$ geeft $y = 1 - 1 = 0$, dus l gaat door $P(1, 0)$.

17 c: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ heeft middelpunt $M(2, -3)$ en straal $r = \sqrt{20}$.
$d(M, A) = \sqrt{(3 - 2)^2 + (1 - -3)^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$
$d(M, A) < r$, dus A ligt binnen de cirkel.

18 c snijden met de y-as, dus $x = 0$
$(0 - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$
$4 + (y + 3)^2 = 20$
$(y + 3)^2 = 16$
$y + 3 = 4 \vee y + 3 = -4$
$y = 1 \vee y = -7$
Dus $P(0, 1)$ en $Q(0, -7)$.

$BP = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - -5)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$

$BQ = \sqrt{(0 - 1)^2 + (-7 - -5)^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$
$PQ = 1 - -7 = 8$
De cosinusregel in $\triangle BPQ$ geeft $PQ^2 = BP^2 + BQ^2 - 2 \cdot BP \cdot BQ \cdot \cos(\angle PBQ)$

$64 = 37 + 5 - 2 \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\angle PBQ)$

$2 \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos(\angle PBQ) = 37 + 5 - 64$

$\cos(\angle PBQ) = \dfrac{37 + 5 - 64}{2 \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{5}} = -0{,}808...$

$\angle PBQ = 143{,}97...°$

Dus $\angle PBQ = 144°$.

12

Bladzijde 199

19 90% van 50 is 45, dus $h = 45$.
$\sin(\alpha) = \frac{45}{50} = 0{,}9$ geeft $\alpha = 64{,}14...°$
Dus $\alpha \approx 64°$.

20 $\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha) = \dfrac{h}{50} \text{ geeft } h = 50\sin(\alpha) \\ V_2 = h \cdot G_2\end{array}\right\} V_2 = 50\sin(\alpha) \cdot G_2$

$V_1 = V_2$ geeft $50 \cdot G_1 = 50\sin(\alpha) \cdot G_2$

$$50\sin(\alpha) \cdot G_2 = 50 \cdot G_1$$

$$G_2 = \frac{50 \cdot G_1}{50\sin(\alpha)}$$

$$G_2 = \frac{G_1}{\sin(\alpha)}$$

12

© Noordhoff Uitgevers bv

Wiskunde Olympiade

2014

Bladzijde 202

A-vragen

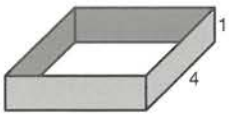
1 Stel dat we het veld B2 zwart kleuren. Dan mogen de 8 velden eromheen niet meer zwart gekleurd worden: de velden boven, onder, links en rechts van B2 staan namelijk in dezelfde kolom of rij als B2, en de andere vier velden raken diagonaal aan B2. Zo blijven alleen rij 4 en kolom D over en in elk mogen we maar één vakje zwart kleuren. In totaal kunnen dan niet meer dan 3 vakjes zwart worden gekleurd. We concluderen dat B2 niet zwart gekleurd mag worden.
Op dezelfde manier kunnen we afleiden dat de velden B3, C2 en C3 niet zwart gekleurd mogen worden. In rij 2 kunnen we dus alleen A2 of D2 zwart kleuren. Als we A2 zwart kleuren, dan moeten we in rij 3 wel D3 zwart kleuren, want A3 staat in dezelfde kolom als A2. Voor rijen 1 en 4 is het dan alleen nog mogelijk om C1 en B4 zwart te kleuren. Dit geeft één oplossing. Als we in plaats van A2 vakje D2 zwart kleuren, vinden we de oplossing waarin D2, A3, B1 en C4 zwart gekleurd worden. In totaal zijn er dus 2 manieren om de zwart te kleuren hokjes te kiezen.
Dus B is het goede antwoord.

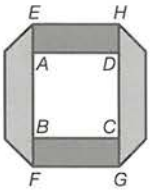
2 Uit de gegevens leiden we af dat $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ van de karpers gele vrouwtjes zijn.
Omdat de helft van de karpers vrouwtjes zijn, vinden we $\frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$ van de karpers rode vrouwtjes zijn. Als we dan ten slotte gebruiken dat drie vijfde van de karpers rood is, vinden we $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ van de karpers rode mannetjes zijn.
Dus D is het goede antwoord.

3 De reis waarin de kikker achtereenvolgens de velden 3, 6, 1, 4, 7, 2 en 5 bezoekt (of juist in omgekeerde volgorde) laat zien dat velden 3 en 5 mogelijke beginvelden zijn van een reis.
We zullen zien dat dit ook de enige mogelijke beginvelden zijn.
We noemen twee velden buren als de kikker van het ene veld naar het andere kan springen (en dus ook van de ander naar de een). Elke tussenstop in de reis van de kikker is dus een veld met minstens twee buren: het veld waar hij vandaan komt en het veld waar hij naartoe gaat.
Omdat de velden 3 en 5 slechts één buur hebben (veld 6 respectievelijk veld 2), moeten dit wel het beginpunt en eindpunt zijn van zijn reis. De andere velden kunnen dan alleen nog tussenstops zijn.
Dus C is het goede antwoord.

Bladzijde 203

4 We bekijken de bovenrand van de papieren ring. Deze rand heeft lengte $4 \times 4 = 16$.
In de opgevouwen figuur volgt de bovenrand de rechthoek $EFGH$.
Omdat $AE = BF = CG = DH = 1$, zien we dat
$AB + FG + CD + EH = 16 - 4 = 12$.
Deze vier lengtes zijn gelijk aan de lengte van de zijden van het vierkant $ABCD$. De zijden van het vierkant hebben dus lengte $\frac{12}{4} = 3$.
Dus B is het goede antwoord.

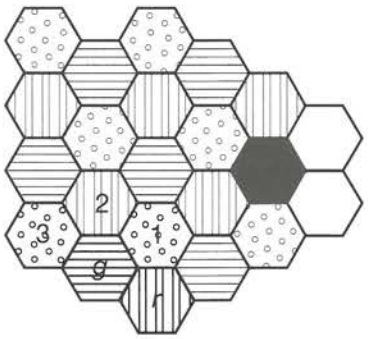




5 Noem het aantal deelnemers n. Het aantal deelnemers dat vóór Dion finishte, is $\frac{1}{2}(n-1)$(de helft van alle deelnemers behalve Dion). Het aantal deelnemers dat vóór Jaap finishte, is $\frac{3}{4}(n-1)$.
Omdat er tussen Dion en Jaap precies 10 deelnemers finishten, volgt dat $\frac{3}{4}(n-1) - \frac{1}{2}(n-1)$ gelijk is aan 11 (Dion zelf en de 10 deelnemers tussen Dion en Jaap). Er volgt dat $\frac{1}{4}(n-1) = 11$, dus $n = 4 \times 11 + 1 = 45$. Het aantal deelnemers was dus 45.
Dus E is het goede antwoord.

© Noordhoff Uitgevers bv

6 We kleuren eerst de twee aangegeven tegels onderaan met twee verschillende kleuren. Dat kan op zes manieren: drie mogelijkheden voor de eerste tegel en dan voor elke keuze twee mogelijkheden voor de tweede tegel. In de figuur zijn de kleuren rood (r) en groen (g) gekozen.



Nu de eerste twee tegels zijn gekleurd, liggen de kleuren van de meeste tegels vast. De tegel met nummer 1 kan enkel nog blauw zijn. Vervolgens moet tegel 2 wel rood zijn en dan moet tegel 3 wel blauw zijn. Zodoende liggen de kleuren van alle andere tegels vast, behalve van de twee tegels helemaal rechts (wit in de figuur).
Voor deze laatste twee tegels zijn er drie mogelijke kleuringen. De bovenste en onderste tegel worden óf groen en rood, óf blauw en rood, óf blauw en groen.
Voor elk van de zes toegestane kleuringen van de eerste twee tegels zijn er zo precies drie manieren om de kleuring af te maken. In totaal zijn er dus $6 \times 3 = 18$ mogelijke kleuringen.
Dus D is het goede antwoord.

7 Merk op dat hoek AMB gestrekt is. Er geldt dus dat $\angle AMD + \angle DMC + \angle CMB = 180°$. Merk op dat $\angle CMB = \angle MDA$ omdat driehoeken AMD en BMC gelijk zijn (drie dezelfde zijden). Dus geldt dat $\angle DMC = 180° - \angle AMD - \angle MDA = \angle DAM$, want de drie hoeken van driehoek AMD zijn samen 180 graden. De driehoeken DMC en DAM zijn dus twee gelijkbenige driehoeken met dezelfde tophoek. Ze zijn daarom aan elkaar gelijk op een vergrotingsfactor na. Dat wil zeggen dat

$\frac{CD}{DM} = \frac{DM}{AD}$. De lengte van CD is dus gelijk aan $\frac{5}{8} \cdot 5 = \frac{25}{8}$.

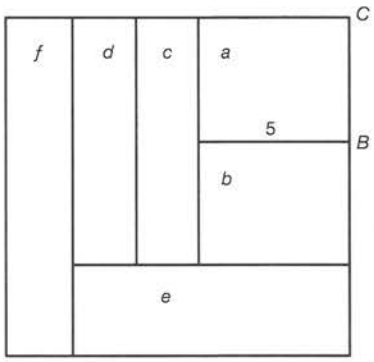
Dus C is het goede antwoord.

Bladzijde 204

8 Vanaf het genoemde punt kunnen we in dezelfde tijd 42% van de afstand stroomopwaarts varen en 58% van de afstand stroomafwaarts. Dat betekent dat de boot $\frac{58}{42}$ keer zo snel gaat met de stroom mee als tegen de stroom in. Noemen we de stroomsnelheid v, dan vinden we dus dat $\frac{25+v}{25-v} = \frac{58}{42}$.
Dit geeft $58 \cdot (25 - v) = 42 \cdot (25 + v)$ ofwel $1450 - 58v = 1050 + 42v$.
We vinden dat $400 = 100v$ ofwel $v = 4$.
Dus B is het goede antwoord.

B-vragen

1 De zes rechthoeken hebben gelijke oppervlakte. De rechthoeken c en d zijn tweemaal zo hoog als rechthoek a en dus tweemaal zo smal. Zij hebben dus breedte $\frac{5}{2}$. Rechthoek e heeft dan breedte $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 5 = 10$ en is daarom half zo hoog als rechthoek a. Maar dan is rechthoek f precies $\frac{5}{2}$ maal zo hoog als rechthoek a en heeft dan breedte $\frac{5}{\frac{5}{2}} = 2$.
Het hele vierkant heeft daarom zijden met lengte $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + 2 = 12$.
Omdat het vierkant $\frac{5}{2}$ maal zo hoog is als rechthoek a, volgt dat de hoogte van rechthoek a gelijk is aan $BC = \frac{12}{\frac{5}{2}} = \frac{24}{5}$.



2 Er is één rijtje met enkel peren. Nu tellen we de rijtjes met minstens één appel.
In zo'n rijtje moeten alle appels direct achter elkaar staan, want tussen twee appels mag nooit een peer staan. Willen we bijvoorbeeld 8 appels kiezen, dan kunnen die op posities 1 t/m 8, op posities 2 t/m 9, of op posities 3 t/m 10 staan, drie mogelijkheden in totaal. Op deze manier vinden we voor 10 appels 1 rijtje, voor 9 appels 2 rijtjes, voor 8 appels 3 rijtjes, en zo door tot en met 1 appel waarvoor er 10 rijtjes zijn. In totaal vinden we dus $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 55$ rijtjes met minstens één appel. Het totaal aantal rijtjes is daarom $55 + 1 = 56$.

© Noordhoff Uitgevers bv

3 Een goede strategie is om eerst kleine voorbeelden te bekijken. Zo vinden we achtereenvolgens

9×4	$40 - 4$	36
99×44	$4400 - 44$	4356
999×444	$444000 - 444$	443556
9999×4444	$44440000 - 4444$	44435556

Het patroon zal duidelijk zijn.
Om de vraag te beantwoorden merken we op dat 999...99 = 1000...00 −1, waarbij het eerste getal 2014 nullen heeft. Het product is daarom gelijk aan

$$\underbrace{444...44}_{2014\text{ vieren}}\underbrace{000...00}_{2014\text{ nullen}} - \underbrace{444...44}_{2014\text{ vieren}} = \underbrace{444...44}_{2013\text{ vieren}}\underbrace{3555...556}_{2013\text{ vijven}}$$

Als we de cijfers hiervan optellen, krijgen we $2013 \cdot 4 + 3 + 2013 \cdot 5 + 6 = 2013 \cdot 9 + 9 = 18\,126$.

4 We laten eerst zien dat elke mooie tabel een score van minstens 3 heeft. Bekijk zo'n tabel en noem het getal precies in het midden a. De vijf getallen in de middelste rij hebben a als gemiddelde en zijn niet allemaal gelijk aan a. Minstens een van deze vijf getallen moet dus kleiner zijn dan a. Op dezelfde manier moet (minstens) een van de vijf getallen in de middelste kolom kleiner zijn dan a, zeg getal b. Omdat b het gemiddelde is van de getallen in zijn rij, is een van de vijf getallen in deze rij kleiner dan b en dus ook kleiner dan a. We hebben nu drie getallen gevonden op verschillende plekken in de tabel, die elk kleiner zijn dan het getal precies in het midden. De score is dus minstens 3.
In de figuur aan de rechterkant zie je dat er een mooie tabel bestaat met score 3. Een score van 3 is dus de laagst mogelijke score.

4	4	3	4	0
4	4	3	4	0
3	3	0	3	−9
4	4	3	4	0
0	0	−9	0	−36

2015

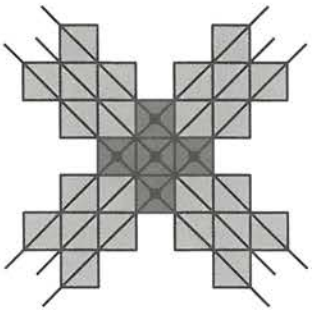
Bladzijde 205

A-vragen

1 Als je de omtrekken van de twee rechthoeken optelt, dan krijg je de omtrek van het vierkant plus twee keer de lengte van het lijnstukje in het midden. Dat lijnstukje in het midden is precies even lang als de zijde van het vierkant. De som van de omtrekken van de twee rechthoeken is dus gelijk aan zes keer de lengte van de zijde van het vierkant. Met andere woorden: de zijde van het vierkant heeft lengte $\frac{30}{6} = 5$.
Dus A is het goede antwoord.

2 Aad, Bas en Carl kunnen niet alle drie de waarheid gesproken hebben, want dan zouden de uitspraken van zowel Dave als Erik onwaar zijn. Een van Aad, Bas of Carl heeft gelogen en dus zijn de uitspraken van Dave en Erik waar. Aad en Bas kunnen niet allebei de waarheid gesproken hebben, want dan zou Dave gelogen hebben en we zagen net dat dat niet het geval is. Op dezelfde manier kunnen Bas en Carl niet allebei de waarheid gesproken hebben omdat de uitspraak van Erik anders onwaar zou zijn. Uit het feit dat de leugenaar Aad of Bas is en tegelijkertijd Bas of Carl is, concluderen we dat de leugenaar wel Bas moet zijn. Aad kwam dus als eerste aan en Carl als derde. Erik kwam tussen Bas en Carl binnen en dat kan alleen nog maar als Bas als laatste binnenkwam en Erik als vierde.
Dus E is het goede antwoord.

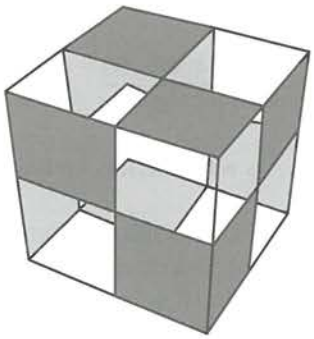
3 De diagonalen bevatten beide 2015 vierkantjes. Omdat de afmetingen van het vierkant oneven zijn, doorsnijden de diagonalen elkaar wel, maar snijden ze de nevendiagonalen niet. Op de diagonalen zijn dus $2 \cdot 2015 - 1 = 4029$ vierkantjes blauw gekleurd. De vier nevendiagonalen bevatten ieder 2014 vierkantjes. Twee nevendiagonalen die niet in dezelfde richting lopen doorsnijden elkaar. Met andere woorden, er zijn vier snijpunten die 'dubbel gekleurd' worden. Op de nevendiagonalen worden dus $4 \cdot 2014 - 4 = 8052$ vierkantjes blauw gekleurd. In totaal zijn er $4029 + 8052 = 12081$ vierkantjes blauw gekleurd.
Dus A is het goede antwoord.



© Noordhoff Uitgevers bv

4 Noem het gemiddelde van de twee getallen n. In dat geval is het ene getal gelijk aan $n - 5$ en het andere getal aan $n + 5$. Hun product is $(n - 5)(n + 5) = n^2 - 25$. We tellen daarom 25 op bij elk van de vijf antwoorden om te zien welk een kwadraat oplevert. We vinden: 22423, 22445, 22467, 22478 en 22500. Het is duidelijk dat $22500 = 150^2$, dus antwoord E is correct. Ter controle berekenen we $149^2 = (150 - 1)^2 = 22500 - 300 + 1 = 22201$. Omdat $149^2 < 22423$ vallen antwoorden A tot en met D inderdaad af.
Dus E is het goede antwoord.

5 Na het verdelen zijn er in totaal 24 vierkanten op de kubus: 12 witte en 12 zwarte. Het aantal donkere hoekpunten kan niet gelijk zijn aan nul, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $8 \times 1 = 8$ (één per hoekpunt). Het aantal donkere hoekpunten kan ook niet gelijk zijn aan één, want dan zou het aantal zwarte vierkanten niet meer zijn dan $3 + 7 \times 1 = 10$. In de figuur zie je een oplossing waarbij slechts twee hoekpunten donker zijn. Het minimale aantal is dus 2.
Dus C is het goede antwoord.



Bladzijde 206

6 Noem het aantal getallen dat we bij elkaar optellen n. Er zijn twee gevallen.
***n* is oneven** In dit geval is er een middelste getal. Noem dat getal k. De som van de n getallen is dan $n \times k = 100$. Omdat n een oneven deler van 100 is (en groter dan 1), moet n gelijk zijn aan 5 of aan 25.
In het eerste geval vinden we $k = \frac{100}{5} = 20$ en de oplossing $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$.
In het tweede geval vinden we $k = 4$, maar dat geeft geen oplossing omdat het kleinste van de 25 getallen dan gelijk zou zijn aan $4 - 12$ en dat is een negatief getal.
***n* is even** Zeg $n = 2m$. De twee getallen in het midden hebben als som een oneven getal, zeg k. De som bestaat nu uit m paren getallen, elk met som k. Dat wil zeggen $100 = k \times m$. Omdat k een oneven deler is van 100 (en groter dan 1), volgt dat $k = 5$ of $k = 25$.
In het eerste geval is $m = 20$ en zijn de middelste twee getallen 2 en 3. Dat geeft geen oplossing, want dan zou het kleinste getal gelijk zijn aan $3 - 20$ en dat is negatief.
In het tweede geval is $m = 4$ met als oplossing $100 = 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$.
Dus B is het goede antwoord.

7 Het middelste punt kan nooit rood gekleurd worden, omdat er dan altijd ofwel drie rode punten op de horizontale lijn ofwel drie rode punten op de verticale lijn komen. Op zowel de horizontale als de verticale lijn moeten twee punten rood gekleurd worden. Er zijn $\frac{4 \times 3}{2} = 6$ manieren om twee punten rood te kleuren op de horizontale lijn. In twee van de gevallen zijn twee punten rood gekleurd die op dezelfde cirkel liggen. Dan zijn er nog twee mogelijke punten over op de verticale lijn die rood gekleurd kunnen worden en dat kan maar op één manier. In de andere vier gevallen liggen de twee rood gekleurde punten op verschillende cirkels en moeten er op de verticale lijn een punt op de kleine en een punt op de grote cirkel rood gekleurd worden; dat kan op $2 \times 2 = 4$ manieren. In totaal zijn er dus $2 \times 1 + 4 \times 4 = 18$ manieren voor Jaap om vier punten rood te kleuren.
Dus C is het goede antwoord.

8 Het aantal uiteinden van takjes verdubbelt elke dag. Op dagen 1, 2, 3, . . . komen er zo 1, 2, 4, 8, . . . nieuwe takjes bij. In het algemeen komen er op dag n precies 2^{n-1} nieuwe takjes bij. Het aantal takjes op de opeenvolgende dagen is dus 1, $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ enzovoorts. Op dag n is het totaal aantal takjes gelijk aan $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
Het aantal blaadjes groeit elke dag met het aantal takjes op de dag ervoor. Op de opeenvolgende dagen zijn er dus 0, $0 + 1$, $0 + 1 + 3$, $0 + 1 + 3 + 7$, . . . blaadjes. In het algemeen is het aantal blaadjes op dag n gelijk aan
$(2^0 - 1) + (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \cdots + (2^{n-1} - 1) = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) - n = (2^n - 1) - n$.
Het totaal aantal blaadjes aan het eind van dag 10 is dus $2^{10} - 11 = 1013$.
Dus D is het goede antwoord.

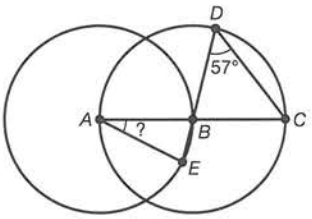
© Noordhoff Uitgevers bv

B-vragen

1 Als a, b, c drie opeenvolgende getallen uit de rij van Julia zijn, dan weten we dat $c = 2b - a$. Anders gezegd: $c - b = b - a$. Dit betekent dat het verschil tussen twee opeenvolgende getallen uit de rij steeds hezelfde is, zeg d.
Als het eerste getal uit de rij x is, dan is de rij dus gelijk aan x, $x + d$, $x + 2d$, $x + 3d$, . . . Het tweede getal uit de rij is gelijk aan $55 = x + d$ en het honderdste getal is $2015 = x + 99d$.
We zien dat $2015 - 55 = 98d$, dus $d = \frac{1960}{98} = 20$. Daarmee vinden we dat $55 = x + 20$, zodat $x = 35$.
Het eerste getal uit de rij van Julia is dus 35.

Bladzijde 207

2 De hoek bij D is gelijk aan de hoek bij C omdat driehoek CBD gelijkbenig is (tophoek B). Hoek DBC is dan $180° - 2 \times 57° = 66°$. Wegens overstaande hoeken is hoek ABE ook 66°. Omdat driehoek BAE gelijkbenig is (tophoek A), is de hoek bij E ook 66°. De hoek bij A is dan $180° - 2 \times 66° = 48°$.



3 Laat $n = abcd$ een getal van vier cijfers zijn, met a ongelijk aan 0. Het dubbele van n schrijven we als $2n = efghi$, waar het eerste cijfer, e, gelijk mag zijn aan 0. Merk eerst het volgende op.
- Het cijfer i is *even*, namelijk gelijk aan $2d$ of aan $2d - 10$.
- Het cijfer h is *even* als $d \leq 4$ en *oneven* als $d \geq 5$.
- Het cijfer g is *even* als $c \leq 4$ en *oneven* als $c \geq 5$.
- Het cijfer f is *even* als $b \leq 4$ en *oneven* als $b \geq 5$.
- Het cijfer e is even als $a \leq 4$ en *oneven* als $a \geq 5$.

Het getal $2n$ is dus afwisselend precies dan als $d \geq 5$, $c \leq 4$, $b \geq 5$ en $a \leq 4$. Om het aantal heel afwisselende getallen te tellen bekijken we twee gevallen.
1. Cijfers a, c zijn *even* en b, d zijn *oneven*. Voor a kunnen we kiezen uit 2, 4 (want 0 mag niet), voor b uit 5, 7, 9, voor c uit 0, 2, 4 en voor d uit 5, 7, 9. In totaal geeft dit $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$ mogelijkheden.
2. Cijfers b, d zijn *even* en a, c zijn *oneven*. Voor a kunnen we kiezen uit 1, 3, voor b uit 6, 8, voor c uit 1, 3 en voor d uit 6, 8. In totaal geeft dit $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ mogelijkheden.

Alles bij elkaar zijn er dus $54 + 16 = 70$ heel afwisselende getallen van vier cijfers.

4 Nummer voor het gemak de leerlingen in de volgorde waarin ze aan de beurt komen. Leerling 20, die als laatste abseilt, heeft de getallen 1 tot en met 20 een keer gezien. Een kaartje met nummer 1 kreeg hij logischerwijs in de laatste ronde. In ronde 19 moet hij het kaartje met nummer 2 gekregen hebben (want er waren maar twee kaartjes). In ronde 18 kan hij alleen het kaartje met nummer 3 gekregen hebben, enzovoorts tot en met ronde 1 waarin hij het kaartje met nummer 20 kreeg. Nu kijken we naar leerling 19. Die heeft in zijn laatste ronde, de 19e ronde, het kaartje met nummer 1 gekregen. In ronde 18 moet hij dan wel het kaartje met nummer 2 gekregen hebben (het kaartje met nummer 3 werd al door leerling 20 gepakt). In ronde 17 moet hij wel het kaartje met nummer 3 gekregen hebben (leerling 20 pakte het kaartje met nummer 4 en nummers 1 en 2 kunnen niet meer). Zo zien we dat leerling 19 in rondes 19, 18, 17, . . . , 1 kaartjes met nummers 1, 2, 3, . . . , 19 moet hebben gepakt, in die volgorde. Als we zo doorredeneren vinden we dat leerling nummer n in rondes n, $n - 1$, $n - 2$, . . . , 1 de kaartjes met nummers 1, 2, 3, . . . , n kreeg, in die volgorde. Omdat Sara in ronde 1 het kaartje met nummer 11 kreeg, moet zij wel leerling nummer 11 zijn. Als zij de getallen op haar kaartjes optelt krijgt ze dus $11 + 10 + 9 + \cdots + 2 + 1 = 66$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Gemengde opgaven

9 Exponentiële verbanden

Bladzijde 208

1 **a** $\frac{10750}{15000} \approx 0{,}72$, $\frac{7700}{10750} \approx 0{,}72$, $\frac{5500}{7700} \approx 0{,}71$, $\frac{3950}{5500} \approx 0{,}72$ en $\frac{2850}{3950} \approx 0{,}72$
De quotiënten verschillen weinig, dus je mag uitgaan van exponentiële afname.

b Exponentiële groei, dus $N = b \cdot g^t$. Bij $t = 0$ hoort $N = 15000$, dus $b = 15000$.
$g_{4\text{ jaar}} = 0{,}72$ geeft $g_{\text{jaar}} = 0{,}72^{\frac{1}{4}} \approx 0{,}92$
Dus $N = 15000 \cdot 0{,}92^t$.

c Los op $15000 \cdot 0{,}92^t = 1500$.
Voer in $y_1 = 15000 \cdot 0{,}92^x$ en $y_2 = 1500$.
Intersect geeft $x \approx 27{,}6$.
Dus voor het eerst op 1 september 2023.

d Voer in $y_3 = 30000$ en zet y_2 uit.
Intersect geeft $x \approx -8{,}31$.
Dus voor het laatst op 1 september 1986.

2 **a** $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$ geeft $g_{10\text{ jaar}} = 1{,}096^{10} \approx 2{,}501$
De toename per 10 jaar is 150,1%.

b $g_{\text{jaar}} = 1{,}096$ geeft $g_{\text{maand}} = 1{,}096^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}008$
De toename per maand is 0,8%.

c Los op $1{,}096^t = 2$, met t in jaren.
Voer in $y_1 = 1{,}096^x$ en $y_2 = 2$.
Intersect geeft $x = 7{,}561...$
Dus na $7{,}561 \cdot 12 \approx 91$ maanden is de hoeveelheid verdubbeld.

d Los op $1{,}096^t = 10$, met t in jaren.
Voer in $y_3 = 10$ en zet y_2 uit.
Intersect geeft $x = 25{,}11...$
Dus na ruim 25 jaar is de hoeveelheid vertienvoudigd.

3 **a** $g_{\text{dag}} = 0{,}83$ geeft $g_{\text{week}} = 0{,}83^7 \approx 0{,}271$
De afname per week is 72,9%.

b $g_{\text{dag}} = 0{,}83$ geeft $g_{\text{uur}} = 0{,}83^{\frac{1}{24}} \approx 0{,}992$
De afname per uur is 0,8%.

c Los op $0{,}83^t = 0{,}5$, met t in dagen.
Voer in $y_1 = 0{,}83^x$ en $y_2 = 0{,}5$.
Intersect geeft $x = 3{,}720...$
Dus na $3{,}720... \cdot 24 \approx 89{,}3$ uur is de hoeveelheid gehalveerd.

d Los op $0{,}83^t = 0{,}25$, met t in dagen.
Voer in $y_3 = 0{,}25$ en zet y_2 uit.
Intersect geeft $x = 7{,}440...$
Dus na ruim 7 dagen is er nog een kwart van de beginhoeveelheid over.

4 **a** ${}^3\log(4 - x) - {}^3\log(18) = -2$
${}^3\log(4 - x) = {}^3\log(18) + {}^3\log\left(\frac{1}{9}\right)$
${}^3\log(4 - x) = {}^3\log\left(18 \cdot \frac{1}{9}\right)$
${}^3\log(4 - x) = {}^3\log(2)$
$4 - x = 2$
$x = 2$ vold.

© Noordhoff Uitgevers bv

b $1 + {}^{\frac{1}{4}}\log(5x - 1) + {}^{\frac{1}{4}}\log(3x - 2) = 0$
$^{\frac{1}{4}}\log(5x - 1) + {}^{\frac{1}{4}}\log(3x - 2) = -1$
$^{\frac{1}{4}}\log((5x - 1)(3x - 2)) = -1$
$(5x - 1)(3x - 2) = 4$
$15x^2 - 10x - 3x + 2 = 4$
$15x^2 - 13x - 2 = 0$
$D = (-13)^2 - 4 \cdot 5 \cdot -2 = 289$
$x = \frac{13 - 17}{30} \vee x = \frac{13 + 17}{30}$
$x = -\frac{2}{15} \vee x = 1$
vold. niet vold.

c $\log(x - 4) + 2 = \log(25x + 50)$
$\log(x - 4) + \log(100) = \log(25x + 50)$
$\log((x - 4) \cdot 100) = \log(25x + 50)$
$\log(100x - 400) = \log(25x + 50)$
$100x - 400 = 25x + 50$
$75x = 450$
$x = 6$ vold.

d ${}^5\log(x + 30) = 3 \cdot {}^5\log(2) + {}^5\log(2x)$
${}^5\log(x + 30) = {}^5\log(2^3) + {}^5\log(2x)$
${}^5\log(x + 30) = {}^5\log(2^3 \cdot 2x)$
${}^5\log(x + 30) = {}^5\log(16x)$
$x + 30 = 16x$
$-15x = -30$
$x = 2$ vold.

Bladzijde 209

5 **a** Van 1 mei tot 21 mei zijn 20 dagen.
Van 21 mei tot 31 mei zijn 11 dagen.
Aan het eind van het onderzoek zijn er $1000 \cdot 1{,}05^{20} \cdot 0{,}92^{11} \approx 1060$ bacteriën.

b Stel de groeifactor per dag vanaf 21 mei is g.
Los op $1000 \cdot 1{,}05^{20} \cdot g^{11} = 1000$ ofwel $1{,}05^{20} \cdot g^{11} = 1$.
Voer in $y_1 = 1{,}05^{20} \cdot g^{11}$ en $y_2 = 1$.
Intersect geeft $x \approx 0{,}915$.
Het gevraagde percentage is 8,5% per dag.

c Stel de toename duurt n dagen, dan duurt de afname $31 - n$ dagen.
Los op $1000 \cdot 1{,}05^n \cdot 0{,}90^{31-n} = 1000$ ofwel $1{,}05^n \cdot 0{,}90^{31-n} = 1$.
Voer in $y_1 = 1{,}05^x \cdot 0{,}90^{31-x}$ en $y_2 = 1$.
Intersect geeft $x \approx 21{,}2$.
De overgang vindt plaats op 22 mei.

6 **a** $g_{\text{mm}} = 0{,}7$ geeft $g_{5\text{ mm}} = 0{,}7^5 \approx 0{,}168$
Door een plastic plaat van 5 mm komt 16,8% van het oorspronkelijke licht.

b $g_{\text{mm}} = 0{,}7$ geeft $g_{1\text{ cm}} = g_{10\text{ mm}} = 0{,}7^{10} \approx 0{,}028$
Er wordt dus 97,2% geabsorbeerd.

c Los op $0{,}7^n \leq 0{,}01$, met n het aantal lagen van 1 mm dikte.
Voer in $y_1 = 0{,}7^x$ en kijk in de tabel.
$x = 12$ geeft $y_1 \approx 0{,}0138$
$x = 13$ geeft $y_1 \approx 0{,}0097$
De plaat moet minstens 13 mm dik zijn.

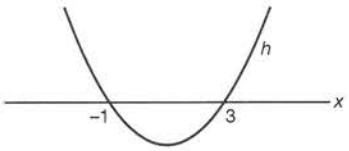
© Noordhoff Uitgevers bv

7 **a** $\underbrace{x^2 - 2x - 3}_{h(x)} > 0$

$h(x) = 0$ geeft $x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x + 1)(x - 3) = 0$

$x = -1 \vee x = 3$



$h(x) > 0$ geeft $x < -1 \vee x > 3$

Dus het domein van f bestaat uit de intervallen $\langle \leftarrow, -1 \rangle$ en $\langle 3, \rightarrow \rangle$.

$x + 7 > 0$ geeft $x > -7$, dus $D_g = \langle -7, \rightarrow \rangle$.

$f(x) = g(x)$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 1 + {}^3\log(x + 7)$

${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3) + {}^3\log(x + 7)$

${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3(x + 7))$

${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = {}^3\log(3x + 21)$

$x^2 - 2x - 3 = 3x + 21$

$x^2 - 5x - 24 = 0$

$(x + 3)(x - 8) = 0$

$x = -3 \vee x = 8$

vold. vold.

$f(x) \leq g(x)$ geeft $-3 \leq x < -1 \vee 3 < x \leq 8$

b $g(5) = 1 + {}^3\log(5 + 7) = 1 + {}^3\log(12)$

$x \leq 5$ geeft $g(x) \leq 1 + {}^3\log(12)$

c $f(-2) = {}^3\log(4 + 4 - 3) = {}^3\log(5)$

$g(-2) = 1 + {}^3\log(-2 + 7) = 1 + {}^3\log(5)$

Dus $AB = 1$.

d $f(x) = 3$ geeft ${}^3\log(x^2 - 2x - 3) = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 27$

$x^2 - 2x - 30 = 0$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -30 = 124$

$$x = \frac{2 - \sqrt{124}}{2} \vee x = \frac{2 + \sqrt{124}}{2}$$

$x = 1 - \sqrt{31} \vee x = 1 + \sqrt{31}$

$CD = 1 + \sqrt{31} - (1 - \sqrt{31}) = 1 + \sqrt{31} - 1 + \sqrt{31} = 2\sqrt{31}$

e Los op $1 + {}^3\log(x + 7) = \frac{1}{4}x + 2$.

Voer in $y_1 = 1 + {}^3\log(x + 7)$ en $y_2 = \frac{1}{4}x + 2$.

Intersect geeft $E(-6{,}496...; 0{,}375...)$ en $F(5{,}068...; 3{,}267...)$.

$EF = \sqrt{(5{,}068... - -6{,}496)^2 + (3{,}267... - 0{,}375...)^2} \approx 11{,}920$

Bladzijde 210

8 **a** $d = 0$ geeft $\log(B) = 3$, dus $B = 10^3 = 1000$ bacteriën aan het begin van de koeling.

$d = 10$ geeft $\log(B) \approx 6{,}3$, dus $B \approx 10^{6{,}3} \approx 2$ miljoen bacteriën na 10 dagen.

b $B = 50$ miljoen geeft $\log(B) = \log(50 \cdot 10^6) \approx 7{,}7$

Aflezen geeft $d \approx 14$, dus na ongeveer 14 dagen.

c Stel $\log(B) = ad + b$ met $a = \frac{6 - 3}{9 - 0} = \frac{1}{3}$.

Door $(0, 3)$, dus $b = 3$.

Dus $\log(B) = \frac{1}{3}d + 3$.

d $B = 50$ miljoen geeft $\frac{1}{3}d + 3 = \log(50\,000\,000)$

$\frac{1}{3}d = \log(50\,000\,000) - 3$

$d = 3\log(50\,000\,000) - 9 \approx 14{,}1$

Het antwoord van vraag b komt overeen met de waarde die uit de formule volgt.

© Noordhoff Uitgevers bv

e $\log(B) = \frac{1}{3}d + 3$
$B = 10^{\frac{1}{3}d + 3}$
$B = 10^{\frac{1}{3}d} \cdot 10^3$
$B = \left(10^{\frac{1}{3}}\right)^d \cdot 1000$
$B \approx 2{,}154^d \cdot 1000$
Dus $B = 1000 \cdot 2{,}154^d$.

f $d = 2$ en $B = 50\,000\,000$ geeft $\frac{1}{3} \cdot 1{,}32^t \cdot 2 + 3 = \log(50\,000\,000)$
Voer in $y_1 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}32^x \cdot 2 + 3$ en $y_2 = \log(50\,000\,000)$.
Intersect geeft $x \approx 7{,}03$.
Dus de koelkast is ingesteld op 7 °C.

g $t = 4$ geeft $\log(B) = \frac{1}{3} \cdot 1{,}32^4 \cdot d + 3$
$B = 10^{\frac{1}{3} \cdot 1{,}32^4 \cdot d + 3}$
$B = 10^{\frac{1}{3} \cdot 1{,}32^4 \cdot d} \cdot 10^3$
$B = \left(10^{\frac{1}{3} \cdot 1{,}32^4}\right)^d \cdot 10^3$
$B \approx 1000 \cdot 10{,}28^d$
Dus de groeifactor per dag is 10,28.

Bladzijde 211

9 **a** $N = 500 \cdot 3{,}28^t$
$\log(N) = \log(500 \cdot 3{,}28^t)$
$\log(N) = \log(500) + \log(3{,}28^t)$
$\log(N) = \log(500) + t \cdot \log(3{,}28)$
$\log(N) \approx 2{,}70 + t \cdot 0{,}52$
Dus $\log(N) = 0{,}52t + 2{,}70$.

b $N = 180 \cdot t^{-1{,}75}$
$\log(N) = \log(180 \cdot t^{-1{,}75})$
$\log(N) = \log(180) + \log(t^{-1{,}75})$
$\log(N) = \log(180) - 1{,}75 \cdot \log(t)$
$\log(N) \approx 2{,}26 - 1{,}75 \cdot \log(t)$
Dus $\log(N) = 2{,}26 - 1{,}75 \cdot \log(t)$.

c $N = 123 \cdot 4{,}5^{6t - 7}$
$\log(N) = \log(123 \cdot 4{,}5^{6t - 7})$
$\log(N) = \log(123) + \log(4{,}5^{6t - 7})$
$\log(N) = \log(123) + (6t - 7)\log(4{,}5)$
$\log(N) = \log(123) + 6t \cdot \log(4{,}5) - 7 \cdot \log(4{,}5)$
$\log(N) \approx -2{,}48 + 3{,}92t$
Dus $\log(N) = 3{,}92t - 2{,}48$.

d $N = 2t \cdot \left(3\sqrt{t}\right)^{4{,}18}$
$N = 2t \cdot 3^{4{,}18} \cdot \left(t^{\frac{1}{2}}\right)^{4{,}18}$
$N = 2t \cdot 3^{4{,}18} \cdot t^{2{,}09}$
$N = 2 \cdot 3^{4{,}18} \cdot t^{3{,}09}$
$\log(N) = \log(2 \cdot 3^{4{,}18} \cdot t^{3{,}09})$
$\log(N) = \log(2 \cdot 3^{4{,}18}) + \log(t^{3{,}09})$
$\log(N) = \log(2 \cdot 3^{4{,}18}) + 3{,}09 \cdot \log(t)$
$\log(N) \approx 2{,}30 + 3{,}09 \cdot \log(t)$
Dus $\log(N) = 2{,}30 + 3{,}09 \cdot \log(t)$.

10 **a** $\log(y) = 0{,}16x + 2{,}64$
$y = 10^{0{,}16x + 2{,}64}$
$y = 10^{0{,}16x} \cdot 10^{2{,}64}$
$y = (10^{0{,}16})^x \cdot 10^{2{,}64}$
$y \approx 1{,}45^x \cdot 437$
Dus $y = 437 \cdot 1{,}45^x$.

b $0{,}8\log(y) = 3\log(x) + 1$
$\log(y) = 3{,}75\log(x) + 1{,}25$
$\log(y) = \log(x^{3{,}75}) + \log(10^{1{,}25})$
$\log(y) = \log(x^{3{,}75} \cdot 10^{1{,}25})$
$y = x^{3{,}75} \cdot 10^{1{,}25}$
$y \approx x^{3{,}75} \cdot 18$
Dus $y = 18x^{3{,}75}$.

c $x = 2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(y) - 14$
$2\frac{1}{2} \cdot {}^3\log(y) = x + 14$
${}^3\log(y) = 0{,}4x + 5{,}6$
$y = 3^{0{,}4x + 5{,}6}$
$y = 3^{0{,}4x} \cdot 3^{5{,}6}$
$y = (3^{0{,}4})^x \cdot 3^{5{,}6}$
$y \approx 1{,}55^x \cdot 470$
Dus $y = 470 \cdot 1{,}55^x$.

d ${}^2\log\left(\sqrt{x}\right) + {}^2\log\left(\sqrt{y}\right) = \sqrt{2}$
${}^2\log\left(\sqrt{xy}\right) = \sqrt{2}$
$\sqrt{xy} = 2^{\sqrt{2}}$
$xy = \left(2^{\sqrt{2}}\right)^2$
$xy = 2^{2\sqrt{2}}$
$y = 2^{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{x}$
$y \approx 7 \cdot x^{-1}$
Dus $y = 7x^{-1}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

11 **a** $AB = 10$ geeft $AD = 5$ en $BD = 5\sqrt{3}$
$BD = 5\sqrt{3}$ geeft $BC = 5\sqrt{3}$
De oppervlakte van vierhoek $ABCD =$
$O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} + \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 12\frac{1}{2}\sqrt{3} + 37\frac{1}{2}$

b $CD = \sqrt{10}$ geeft $BD = \dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$

$BD = \sqrt{5}$ geeft $AD = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ en $AB = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{15}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{15}$

c $BD = a$ geeft $BC = a$ en $AD = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$

$O(ABCD) = 7\frac{1}{2}$
$O(\triangle ABD) + O(\triangle BCD) = 7\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot BD + \frac{1}{2} \cdot BD \cdot BC = 7\frac{1}{2}$
$AD \cdot BD + BD \cdot BC = 15$

$\dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot a + a \cdot a = 15$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)a^2 = 15$

Voer in $y_1 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + 1\right)x^2$ en $y_2 = 15$.

Intersect geeft $x \approx 3{,}08$.
Dus voor $a \approx 3{,}08$.

12 **a** Om 9 uur maken de wijzers een rechte hoek met elkaar.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABM$ geeft $AB^2 = AM^2 + BM^2$
$AB^2 = 9{,}5^2 + 6{,}5^2$
$AB = \sqrt{152{,}5} = 11{,}51...$
Dus $d(A, B) \approx 11{,}5$ cm.

b Om 5 uur maken de wijzers een hoek van 150° met elkaar.
De cosinusregel in $\triangle ABM$ geeft $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB)$
$AB^2 = 9{,}5^2 + 6{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}5 \cdot 6{,}5 \cdot \cos(150°)$
$AB = \sqrt{239{,}4...} = 15{,}47...$
Dus $d(A, B) \approx 15{,}5$ cm.

c De grote wijzer staat op 12 uur.
De cosinusregel in $\triangle ABM$ geeft $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2 \cdot AM \cdot BM \cdot \cos(\angle AMB)$
$13{,}9^2 = 9{,}5^2 + 6{,}5^2 - 2 \cdot 9{,}5 \cdot 6{,}5 \cdot \cos(\angle AMB)$
$123{,}5\cos(\angle AMB) = -60{,}71$
$\cos(\angle AMB) = -0{,}491...$
$\angle AMB = 119{,}4...°$
De wijzers maken een hoek van 120° met elkaar.
Het kan dus 4 uur en 8 uur zijn geweest.

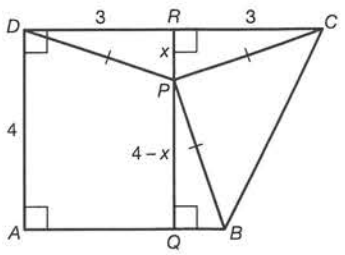
d Stel de lengte van BM is x, dan is $AM = x + 1$.
De cosinusregel in $\triangle ABM$ geeft $13^2 = (x + 1)^2 + x^2 - 2 \cdot (x + 1) \cdot x \cdot \cos(120°)$
$169 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x(x + 1) \cdot -\frac{1}{2}$
$169 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x(x + 1)$
$169 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + x^2 + x$
$169 = 3x^2 + 3x + 1$
$3x^2 + 3x - 168 = 0$
$x^2 + x - 56 = 0$
$(x - 7)(x + 8) = 0$
$x = 7 \vee x = -8$
Dus $x = 7$ en dit geeft $d(A, M) = 7 + 1 = 8$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 212

13 Teken de lijn l door P loodrecht op AB met Q op AB en R op CD.
PR is hoogtelijn in de gelijkbenige driehoek CDP,
dus $DR = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$. Stel $PR = x$, dan is $PQ = 4 - x$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle DPR$ geeft $DP^2 = DR^2 + RP^2$

$$DP^2 = 3^2 + x^2$$
$$DP^2 = x^2 + 9$$



$AQ = DR = 3$, dus $BQ = 1$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle BPQ$ geeft $BP^2 = BQ^2 + PQ^2$

$$BP^2 = 1^2 + (4 - x)^2$$
$$BP^2 = 1 + 16 - 8x + x^2$$
$$BP^2 = x^2 - 8x + 17$$

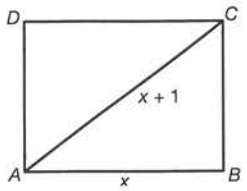
$BP = DP$, dus ook $BP^2 = DP^2$

$$x^2 + 9 = x^2 - 8x + 17$$
$$8x = 8$$
$$x = 1$$

$BP^2 = x^2 + 9 = 1^2 + 9 = 10$, dus $BP = \sqrt{10}$.

14 **a** Stel $AB = x$, dan is $AC = x + 1$.
De stelling van Pythagoras in $\triangle ABC$ geeft $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$x^2 + BC^2 = (x + 1)^2$$
$$BC^2 = x^2 + 2x + 1 - x^2$$
$$BC^2 = 2x + 1$$
$$BC = \sqrt{2x + 1}$$



De omtrek = 14 geeft $2 \cdot AB + 2 \cdot BC = 14$

$$2x + 2\sqrt{2x + 1} = 14$$
$$2\sqrt{2x + 1} = 14 - 2x$$
$$\sqrt{2x + 1} = 7 - x$$

kwadrateren geeft

$$2x + 1 = 49 - 14x + x^2$$
$$x^2 - 16x + 48 = 0$$
$$(x - 4)(x - 12) = 0$$
$$x = 4 \vee x = 12$$

vold. vold. niet

Dus de lengte van AB is 4.

b De oppervlakte = 10 geeft $AB \cdot BC = 10$

$$x\sqrt{2x + 1} = 10$$

Voer in $y_1 = x\sqrt{2x + 1}$ en $y_2 = 10$.
Intersect geeft $x = 3{,}52246...$
Dus de lengte van AB is ongeveer 3,52.

15 In $\triangle ABC$ geldt $\angle B = 180° - 71° - 55° = 54°$.
De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\dfrac{AC}{\sin(\angle B)} = \dfrac{BC}{\sin(\angle A)} = \dfrac{AB}{\sin(\angle C)}$

$$\frac{450}{\sin(54°)} = \frac{BC}{\sin(55°)} = \frac{AB}{\sin(71°)}$$

Uit $\dfrac{450}{\sin(54°)} = \dfrac{BC}{\sin(55°)}$ volgt $BC = \dfrac{450\sin(55°)}{\sin(54°)} = 455{,}6...$

Uit $\dfrac{450}{\sin(54°)} = \dfrac{AB}{\sin(71°)}$ volgt $AB = \dfrac{450\sin(71°)}{\sin(54°)} = 525{,}9...$

De omtrek van $\triangle ABC$ is $450 + 455{,}6... + 525{,}9... = 1431{,}5...$

10 km = 10 000 m en $\dfrac{10\,000}{1431{,}5...} = 6{,}9...$

De grachtenloop moet dus uit minstens 7 hele rondes bestaan.

© Noordhoff Uitgevers bv

16 **a** $rc_{AC} = \frac{2-3}{4-1} = -\frac{1}{3}$

$\tan(\alpha) = -\frac{1}{3}$ geeft $\alpha = -18{,}43...°$

$rc_{BD} = \frac{6-0}{2-3} = -6$

$\tan(\beta) = -6$ geeft $\beta = -80{,}53...°$

$\alpha - \beta = -18{,}43...° - -80{,}53...° = 62{,}10...°$

Dus $\angle(AC, BD) \approx 62{,}1°$.

b Stel CD: $y = ax + b$ met $a = \frac{2-6}{4-2} = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } C(4,2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 4 + b = 2 \\ -8 + b = 2 \\ b = 10 \end{array}$$

Dus CD: $y = -2x + 10$.

De lijn k gaat door A en staat loodrecht op CD.

$$\left.\begin{array}{l} k\text{: } y = \frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(1,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus k: $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$.

CD snijden met k geeft het snijpunt S.

$-2x + 10 = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$

$-2\frac{1}{2}x = -7\frac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y = -2x + 10 \end{array}\right\} y = -2 \cdot 3 + 10 = 4$$

Dus $S(3, 4)$.

$d(A, CD) = d(A, S) = \sqrt{(3-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

c Stel AB: $y = ax + b$ met $a = \frac{0-3}{3-1} = -1\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -1\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A(1,3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1\frac{1}{2} + b = 3 \\ b = 4\frac{1}{2} \end{array}$$

Dus AB: $y = -1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2}$.

$y = 1$ geeft $-1\frac{1}{2}x + 4\frac{1}{2} = 1$

$-1\frac{1}{2}x = -3\frac{1}{2}$

$x = 2\frac{1}{3}$

Dus $E(2\frac{1}{3}, 1)$.

Stel BC: $y = ax + b$ met $a = \frac{2-0}{4-3} = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x + b \\ \text{door } B(3,0) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 + b = 0 \\ b = -6 \end{array}$$

Dus BC: $y = 2x - 6$.

$y = 1$ geeft $2x - 6 = 1$

$2x = 7$

$x = 3\frac{1}{2}$

Dus $F(3\frac{1}{2}, 1)$.

$d(E, F) = x_F - x_E = 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}$

Alternatieve uitwerking

Van B naar A gaat 3 omhoog en 2 naar links.

Als je 1 omhoog gaat, ga je dus $\frac{2}{3}$ naar links, dus $x_E = 3 - \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3}$.

Van B naar C gaat 2 omhoog en 1 naar rechts.

Als je 1 omhoog gaat, ga je dus $\frac{1}{2}$ naar rechts, dus $x_F = 3 + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

$d(E, F) = x_F - x_E = 3\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} = 1\frac{1}{6}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 213

17 In $\triangle ABD$ geldt $\angle D = 180° - 52° - 26° - 61° = 41°$.

De sinusregel in $\triangle ABD$ geeft $\dfrac{AB}{\sin(\angle D)} = \dfrac{BD}{\sin(\angle A)}$

$$\frac{250}{\sin(41°)} = \frac{BD}{\sin(52° + 26°)}$$

$$BD = \frac{250\sin(78°)}{\sin(41°)} = 372{,}7...$$

In $\triangle ABC$ geldt $\angle C = 180° - 26° - 61° - 50° = 43°$.

De sinusregel in $\triangle ABC$ geeft $\dfrac{AB}{\sin(\angle C)} = \dfrac{BC}{\sin(\angle A)}$

$$\frac{250}{\sin(43°)} = \frac{BC}{\sin(26°)}$$

$$BC = \frac{250\sin(26°)}{\sin(43°)} = 160{,}6...$$

De cosinusregel in $\triangle BCD$ geeft $CD^2 = BC^2 + BD^2 - 2 \cdot BC \cdot BD \cdot \cos(\angle B)$

$CD^2 = 160{,}6...^2 + 372{,}7...^2 - 2 \cdot 160{,}6... \cdot 372{,}7... \cdot \cos(50°)$

$CD^2 = 87\,753{,}4...$

$CD = 296{,}2...$

Dus de lengte CD van het eiland is ongeveer 296 meter.

18 **a** $r_1 = d(M, A) = \sqrt{(5-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

c_1: $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 13$

c_1: $x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 13$

c_1: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 21 = 0$

$r_2 = y_A = 2$

c_2: $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 2^2$

c_2: $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 4$

c_2: $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$

b $\text{rc}_{AM} = \dfrac{2-5}{5-3} = -\frac{3}{2}$

k gaat door A en staat loodrecht op AM, dus $\text{rc}_k = \frac{2}{3}$.

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$

Dus de hoek waaronder k de y-as snijdt is $90° - 33{,}69...° \approx 56{,}3°$.

c $d(M, c_2) = r_1 - r_2 = \sqrt{13} - 2$

Bladzijde 214

19 **a** $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 - 4y + 3 = 0$

$(x-3)^2 - 9 + (y-2)^2 - 4 + 3 = 0$

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 10$

Dus $M(3, 2)$ en $r = \sqrt{10}$.

Stel l: $y = 3x + b$.

l snijden met c geeft $x^2 + (3x+b)^2 - 6x - 4(3x+b) + 3 = 0$

$x^2 + 9x^2 + 6bx + b^2 - 6x - 12x - 4b + 3 =$

$10x^2 + (6b - 18)x + b^2 - 4b + 3 = 0$

Raken, dus $D = 0$

$(6b-18)^2 - 4 \cdot 10 \cdot (b^2 - 4b + 3) = 0$

$36b^2 - 216b + 324 - 40b^2 + 160b - 120 = 0$

$-4b^2 - 56b + 204 = 0$

$b^2 + 14b - 51 = 0$

$(b-3)(b+17) = 0$

$b = 3 \vee b = -17$

Dus l_1: $y = 3x + 3$ en l_2: $y = 3x - 17$.

© Noordhoff Uitgevers bv

b De lijn p gaat door M en staat loodrecht op k.

$$\left.\begin{array}{l} p\colon y = -\frac{1}{3}x + b \\ \text{door } M(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{3} \cdot 3 + b = 2 \\ -1 + b = 2 \\ \qquad b = 3 \end{array}$$

Dus $p\colon y = -\frac{1}{3}x + 3$.

k snijden met p geeft het snijpunt S.

$3x + 13 = -\frac{1}{3}x + 3$

$3\frac{1}{3}x = -10$

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 \\ y = 3x + 13 \end{array}\right\} y = 3 \cdot -3 + 13 = 4$$

Dus $S(-3, 4)$.

$d(c, k) = d(M, S) - r = \sqrt{(3 - -3)^2 + (2 - 4)^2} - \sqrt{10} = \sqrt{40} - \sqrt{10} = 2\sqrt{10} - \sqrt{10} = \sqrt{10}$

c $x = 0$ geeft $y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y - 1)(y - 3) = 0$

$y = 1 \vee y = 3$

Dus $A(0, 1)$ en $B(0, 3)$.

$\text{rc}_{MA} = \dfrac{2 - 1}{3 - 0} = \frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_m = -3$.

$\tan(\alpha) = -3$ geeft $\alpha = -71{,}56...°$

$\text{rc}_{MB} = \dfrac{2 - 3}{3 - 0} = -\frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_n = 3$.

$\tan(\beta) = 3$ geeft $\beta = 71{,}56...°$

$\beta - \alpha = 143{,}13...°$

Dus $\angle(m, n) = 180° - 143{,}13...° \approx 36{,}9°$.

20 **a** $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$

$x^2 - 2x + y^2 - 2y - 8 = 0$

$(x - 1)^2 - 1 + (y - 1)^2 - 1 - 8 = 0$

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 10$

Dus $M(1, 1)$ en $r_1 = \sqrt{10}$.

c_2 heeft middelpunt O en straal $r_2 = 1$.

$d(c_1, c_2) = r_1 - r_2 - d(O, M) = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{(1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{10} - 1 - \sqrt{2}$

b $y = 0$ geeft $x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x + 2)(x - 4) = 0$

$x = -2 \vee x = 4$

Dus $A(-2, 0)$ en $B(4, 0)$.

Op dezelfde manier vind je $C(0, 4)$ en $D(0, -2)$.

$O(ABCD) = O(\triangle OAD) + O(\triangle OBD) + O(\triangle OBC) + O(\triangle OAC)$

Dus $O(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 2 + 4 + 8 + 4 = 18$.

c $\text{rc}_{MA} = \dfrac{1 - 0}{1 - -2} = \frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_k = -3$.

$\text{rc}_{MC} = \dfrac{1 - 4}{1 - 0} = -3$, C ligt op k.

11 Verbanden en functies

21 **a** $$\left.\begin{array}{l} s = at^3 + bt^2 \\ t = 2 \text{ en } s = 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 = 16 \\ 8a + 4b = 16 \\ 2a + b = 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} s = at^3 + bt^2 \\ t = 4 \text{ en } s = 48 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 = 48 \\ 64a + 16b = 48 \\ 4a + b = 3 \end{array}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ 4a + b = 3 \end{cases} -$$
$$-2a = 1$$
$$\left.\begin{array}{l} a = -\frac{1}{2} \\ 2a + b = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot -\frac{1}{2} + b = 4 \\ -1 + b = 4 \\ b = 5 \end{array}$$
Dus $a = -\frac{1}{2}$ en $b = 5$.

b Voer in $y_1 = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2$.
De optie maximum geeft $x = 6{,}66...$ en $y = 74{,}07...$
Dus de maximale afstand tot de brug is 74 meter.

c Voer in $y_2 = 20$.
Intersect geeft $x = 2{,}27...$
$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x = 2{,}27...} = 14{,}98...$$
De snelheid is 14,98... m/s ≈ 54 km/uur.

22 $$\left.\begin{array}{l} v = at^3 + bt^2 \\ t = 5 \text{ en } v = 12{,}5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 = 12{,}5 \\ 125a + 25b = 12{,}5 \\ 10a + 2b = 1 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v = at^3 + bt^2 \\ t = 8 \text{ en } v = 22{,}4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2 = 22{,}4 \\ 512a + 64b = 22{,}4 \\ 16a + 2b = 0{,}7 \end{array}$$
$$\begin{cases} 10a + 2b = 1 \\ 16a + 2b = 0{,}7 \end{cases} -$$
$$-6a = 0{,}3$$
$$\left.\begin{array}{l} a = -0{,}05 \\ 10a + 2b = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 10 \cdot -0{,}05 + 2b = 1 \\ -0{,}5 + 2b = 1 \\ 2b = 1{,}5 \\ b = 0{,}75 \end{array}$$
Dus $v = -0{,}05t^3 + 0{,}75t^2$.
$t = 10$ geeft $v = -0{,}05 \cdot 1000 + 0{,}75 \cdot 100 = 25$
Dus de snelheid na tien seconden is 25 km/uur.

Bladzijde 215

23 **a** $$\left.\begin{array}{l} A = c \cdot m^{0{,}67} \\ m = 40 \text{ en } A = 1{,}36 \end{array}\right\} \begin{array}{l} c \cdot 40^{0{,}67} = 1{,}36 \\ c = \dfrac{1{,}36}{40^{0{,}67}} = 0{,}1148... \end{array}$$
Dus de evenredigheidsconstante is 0,11.

b $m = 175$ geeft $A = 0{,}11 \cdot 175^{0{,}67} = 3{,}501...$
Dus de lichaamsoppervlakte is 3,50 m².

c 116 cm² = 0,0116 m²
$$0{,}11m^{0{,}67} = 0{,}0116$$
$$m^{0{,}67} = \frac{0{,}0116}{0{,}11} = 0{,}105...$$
$$m = 0{,}105...^{\frac{1}{0{,}67}} = 0{,}0348...$$
Dus de massa is 0,0348... kg ≈ 35 gram.

24 **a** $$\left.\begin{array}{l} D = \dfrac{c}{N^{0{,}6}} \text{ ofwel } c = D \cdot N^{0{,}6} \\ N = 1000 \text{ en } D = 20 \end{array}\right\} c = 20 \cdot 1000^{0{,}6} = 1261{,}9...$$
Dus $D = \dfrac{1262}{N^{0{,}6}}$.

b 750 bomen op 8 ha geeft $N = \dfrac{750}{8} = 93{,}75$. Dit geeft $D = \dfrac{1262}{93{,}75^{0{,}6}} = 82{,}77...$
Dus de gemiddelde diameter is 83 cm.

© Noordhoff Uitgevers bv

c $D = 17$ geeft $\frac{1262}{N^{0,6}} = 17$

$17N^{0,6} = 1262$

$N^{0,6} = \frac{1262}{17} = 74,23...$

$N = 74,23...^{\frac{1}{0,6}} = 1311,2...$

Er staan dus $4 \cdot 1311,2... \approx 5245$ bomen op het perceel van 4 ha.

25 **a** Stel $V = c \cdot D^a$.

$D = 2,0$ en $V = 2$ geeft $c \cdot 2^a = 2$ ofwel $c = \frac{2}{2^a}$

$D = 5,5$ en $V = 42$ geeft $c \cdot 5,5^a = 42$ ofwel $c = \frac{42}{5,5^a}$

Voer in $y_1 = \frac{2}{2^x}$ en $y_2 = \frac{42}{5,5^x}$.

Intersect geeft $x = 3,00...$ en $y = 0,248...$

Dus $c \approx 0,25$ en $a \approx 3$.

Dit geeft de formule $V = 0,25 \cdot D^3$.

Controle of de andere punten van de tabel voldoen geeft

$D = 2,8$ en $V = 5,5$ geeft $0,25 \cdot 2,8^3 = 5,488 \approx 5,5$ klopt

$D = 3,1$ en $V = 7,5$ geeft $0,25 \cdot 3,1^3 = 7,44... \approx 7,5$ klopt

$D = 4,4$ en $V = 21$ geeft $0,25 \cdot 4,4^3 = 21,296 \approx 21$ klopt

$D = 5,2$ en $V = 36$ geeft $0,25 \cdot 5,2^3 = 35,152 \approx 36$ klopt

Dus V is evenredig met D^3.

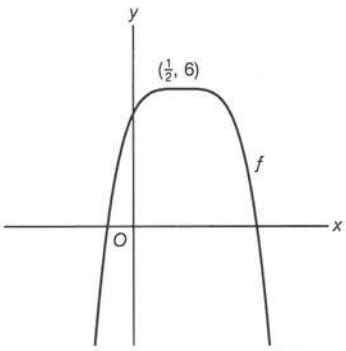
b Voer in $y_1 = 0,25x^3$, $y_2 = 25$ en $y_3 = 35$.

Intersect met y_1 en y_2 geeft $x = 4,641...$

Intersect met y_1 en y_3 geeft $x = 5,192...$

De diameters in mm nauwkeurig van 4,7 cm tot en met 5,1 cm behoren tot klasse II.

26 **a** $f(x) = -(2x-1)^4 + 6 = -\left(2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^4 + 6 = -2^4 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + 6 = -16\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + 6$



$B_f = \langle \leftarrow, 6]$ en max. is $f\left(\frac{1}{2}\right) = 6$.

b $f(x) = -(2x-1)^4 + 6$ geeft $f'(x) = 2 \cdot -4(2x-1)^3 = -8(2x-1)^3$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = -8 \cdot (2-1)^3 = -8$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -8x + b \\ f(1) = 5, \text{ dus } A(1, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -8 + b = 5 \\ b = 13 \end{array}$$

Dus k: $y = -8x + 13$.

c $f(x) = -10$ geeft $-(2x-1)^4 + 6 = -10$

$-(2x-1)^4 = -16$

$(2x-1)^4 = 16$

$2x - 1 = 2 \vee 2x - 1 = -2$

$2x = 3 \vee 2x = -1$

$x = 1\frac{1}{2} \vee x = -\frac{1}{2}$

d $y = -16\left(x - \frac{1}{2}\right)^4 + 6$

$\downarrow$ translatie $(-1, -4)$

$y = -16\left(x + 1 - \frac{1}{2}\right)^4 + 6 - 4$ ofwel

$y = -16\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 + 2$

$\downarrow$ verm. x-as, $-\frac{1}{2}$

$y = 8\left(x + \frac{1}{2}\right)^4 - 1$

De top van de beeldgrafiek is $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 216

27 **a** $y = 2 + \sqrt{a - 2x - x^2}$

$\sqrt{a - 2x - x^2} = y - 2$

kwadrateren geeft

$a - 2x - x^2 = y^2 - 4y + 4$

$x^2 + 2x + y^2 - 4y = a - 4$

$(x + 1)^2 - 1 + (y - 2)^2 - 4 = a - 4$

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = a + 1$

Dit is de vergelijking van een cirkel als $a + 1 > 0$ ofwel $a > -1$.

Alternatieve uitwerking

De grafiek van f is een halve cirkel als de vorm onder het wortelteken twee nulpunten heeft.

Dus $D > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} D = (-2)^2 - 4 \cdot -1 \cdot a \\ D > 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4 + 4a > 0 \\ 4a > -4 \\ a > -1 \end{array}$$

b Uit vraag a volgt $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = a + 1$.

Dus $M(-1, 2)$.

$\text{rc}_{MA} = \dfrac{3 - 2}{1 - -1} = \frac{1}{2}$, dus $\text{rc}_k = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(1, 3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 + b = 3 \\ b = 5 \end{array}$$

Dus k: $y = -2x + 5$.

c Bij vraag a is het functievoorschrift van f herleid tot $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = a + 1$.

Dus het middelpunt van de (halve) cirkel is het punt $M(-1, 2)$ en straal $\sqrt{a + 1}$.

De lijn $x = -1$ snijdt de lijn $y = p$ in het punt $D(-1, p)$ met $p > 2$.

$d(B, C) = 2\sqrt{a}$ geeft $d(B, D) = \sqrt{a}$

De stelling van Pythagoras in $\triangle MBD$ geeft $MD^2 + BD^2 = MB^2$

$(p - 2)^2 + (\sqrt{a})^2 = (\sqrt{a + 1})^2$

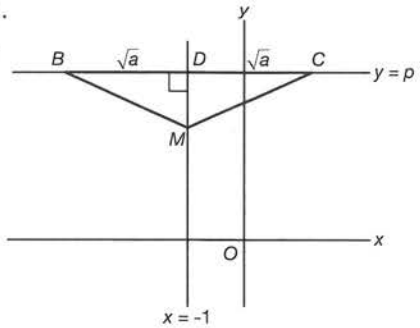
$(p - 2)^2 + a = a + 1$

$(p - 2)^2 = 1$

$p - 2 = 1 \vee p - 2 = -1$

$p = 3 \vee p = 1$

vold. vold. niet



Dus $p = 3$.

28 **a** $5 - 2x \geq 0$ geeft $-2x \geq 5$ ofwel $x \leq 2\frac{1}{2}$, dus $D_f = \langle\leftarrow, 2\frac{1}{2}]$.

Het beginpunt is $(2\frac{1}{2}, -1)$ en het bereik is $B_f = [-1, \rightarrow\rangle$ (zie figuur G.13).

noemer = 0 geeft $x = 2\frac{1}{2}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 2\frac{1}{2}$.

Voor grote x is $f(x) \approx \dfrac{2x}{-2x} = -1$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = -1$.

b $f(x) = 0$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x} = 0$

$\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x} = 1$

$\sqrt{5 - 2x} = 2$

$5 - 2x = 4$

$-2x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

$g(x) = 0$ geeft $2x - 1 = 0$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2}$

Beide grafieken snijden de x-as in het punt $(\frac{1}{2}, 0)$, dus de grafieken snijden elkaar in een punt op de x-as.

c Zie vraag b.

De grafieken snijden elkaar voor $x = \frac{1}{2}$.

$f(x) < g(x)$ geeft $\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

d $f(-10) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2 \cdot -10} = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{25} = -1 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 1\frac{1}{2}$

$x > -10$ geeft $-1 \leq f(x) < 1\frac{1}{2}$

e $f(x) = -\frac{1}{2}$ geeft $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x} = \frac{1}{2}$

$\sqrt{5 - 2x} = 1$

$5 - 2x = 1$

$-2x = -4$

$x = 2$

Dus $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$.

$f(x) = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x}$ geeft $f'(x) = -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5 - 2x}} = -\frac{1}{2\sqrt{5 - 2x}}$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{5 - 2 \cdot 2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } A\left(2, -\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} -\frac{1}{2} \cdot 2 + b = -\frac{1}{2}$

$-1 + b = -\frac{1}{2}$

$b = \frac{1}{2}$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

f $\frac{2x - 1}{5 - 2x} = x + 1$

$2x - 1 = (x + 1)(5 - 2x)$

$2x - 1 = 5x - 2x^2 + 5 - 2x$

$2x^2 - x - 6 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot -6 = 1 + 48 = 49$

$x = \frac{1 - 7}{4} \vee x = \frac{1 + 7}{4}$

$x = -1\frac{1}{2} \vee x = 2$

$x = -1\frac{1}{2}$ geeft $y = -1\frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$, dus $B\left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$x = 2$ geeft $y = 2 + 1 = 3$, dus $C(2, 3)$.

$BC = \sqrt{\left(2 - -1\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3 - -\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3\frac{1}{2}\right)^2} = 3\frac{1}{2}\sqrt{2}$

g $y = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x}$

$\frac{1}{2}\sqrt{5 - 2x} = y + 1$

$\sqrt{5 - 2x} = 2y + 2$

kwadrateren geeft

$5 - 2x = 4y^2 + 8y + 4$

$-2x = 4y^2 + 8y - 1$

$x = -2y^2 - 4y + \frac{1}{2}$

h $y = \frac{2x - 1}{5 - 2x}$

$y(5 - 2x) = 2x - 1$

$5y - 2xy = 2x - 1$

$-2xy - 2x = -5y - 1$

$2xy + 2x = 5y + 1$

$x(2y + 2) = 5y + 1$

$x = \frac{5y + 1}{2y + 2}$

© Noordhoff Uitgevers bv

29 $x = p$ geeft $y_A = p^2 - 3\frac{1}{2}p - 4\frac{1}{2}$ en $y_B = \frac{1}{2}p^2 - 1\frac{1}{2}x - 2$

$AB = y_B - y_A = \frac{1}{2}p^2 - 1\frac{1}{2}p - 2 - \left(p^2 - 3\frac{1}{2}p - 4\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}p^2 - 1\frac{1}{2}p - 2 - p^2 + 3\frac{1}{2}p + 4\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}p^2 + 2p + 2\frac{1}{2}$

$p_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \cdot -\frac{1}{2}} = 2$

Dus voor $p = 2$ is de lengte van AB maximaal.

Bladzijde 217

30 **a** $\left.\begin{array}{l} I = \pi r^2 h \\ I = 500 \end{array}\right\} \pi r^2 h = 500$

$h = \dfrac{500}{\pi r^2}$

$O_{\text{glas}} = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \dfrac{500}{\pi r^2} = \pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$

$O_{\text{metaal}} = 25 + \pi r^2$

$K = \left(\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}\right) \cdot 1 + (25 + \pi r^2) \cdot 2 = \pi r^2 + \dfrac{1000}{r} + 50 + 2\pi r^2 = 50 + 3\pi r^2 + \dfrac{1000}{r}$

b $K = 50 + 3\pi r^2 + \dfrac{1000}{r} = 50 + 3\pi r^2 + 1000r^{-1}$ geeft $\dfrac{dK}{dr} = 6\pi r - 1000r^{-2} = 6\pi r - \dfrac{1000}{r^2}$

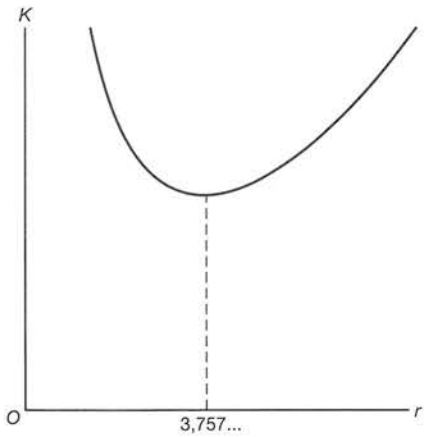
$\dfrac{dK}{dr} = 0$ geeft $6\pi r - \dfrac{1000}{r^2} = 0$

$6\pi r = \dfrac{1000}{r^2}$

$6\pi r^3 = 1000$

$r^3 = \dfrac{1000}{6\pi}$

$r = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{6\pi}} = 3{,}757...$



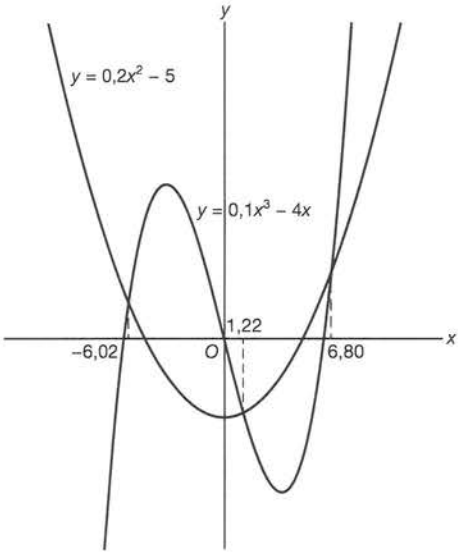
$r = 3{,}757...$ geeft $h = \dfrac{500}{\pi \cdot 3{,}757...^2} = 11{,}272...$ en $K = 50 + 3\pi \cdot 3{,}757...^2 + \dfrac{1000}{3{,}757...} = 449{,}201...$

Dus bij een straal van 38 mm en een hoogte van 113 mm zijn de totale materiaalkosten minimaal.
Deze minimale kosten zijn 449,20 geldeenheden.

© Noordhoff Uitgevers bv

31 $\frac{x^2 - 10}{x - 2} = \frac{3x}{x - 2}$
$x^2 - 10 = 3x$
$x^2 - 3x - 10 = 0$
$(x + 2)(x - 5) = 0$
$x = -2 \vee x = 5$
vold. vold.

32 Voer in $y_1 = 0{,}1x^3 - 4x$ en $y_2 = 0{,}2x^2 - 5$.
Intersect geeft $x = -6{,}021... \vee x = 1{,}220... \vee x = 6{,}800...$



$0{,}1x^3 - 4x < 0{,}2x^2 - 5$ geeft $x < -6{,}02 \vee 1{,}22 < x < 6{,}80$

33 $\frac{a^3}{a^5} \cdot (a^4)^n = a^{-2} \cdot a^{4n} = a^{4n-2}$

34 $rc_l = \frac{1}{2}$, dus $rc_k = -2$.
$\left.\begin{array}{l} y = -2x + b \\ \text{door } A(3, 2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + b = 2 \\ -6 + b = 2 \\ b = 8 \end{array}$
Dus k: $y = -2x + 8$.

35 ${}^2\log(x + 3) = 4 - {}^2\log(x - 3)$
${}^2\log(x + 3) + {}^2\log(x - 3) = 4$
${}^2\log((x + 3)(x - 3)) = 4$
$(x + 3)(x - 3) = 16$
$x^2 - 9 = 16$
$x^2 = 25$
$x = 5 \vee x = -5$
vold. vold. niet

© Noordhoff Uitgevers bv

36 De lijn door E en F snijdt AD in het punt M. Dit geeft $AM = 3$.
Stel $EF = 2x$, dan is $AE = x$.
In $\triangle AEM$ geeft de stelling van Pythagoras $AM^2 + EM^2 = AE^2$

$$3^2 + EM^2 = x^2$$
$$EM^2 = x^2 - 9$$
$$EM = \sqrt{x^2 - 9}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB = 2 \cdot ME + EF \\ AB = 10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot ME + EF \\ 2\sqrt{x^2 - 9} + 2x = 10 \\ \sqrt{x^2 - 9} + x = 5 \\ \sqrt{x^2 - 9} = 5 - x \end{array}$$

kwadrateren geeft

$$x^2 - 9 = 25 - 10x + x^2$$
$$10x = 34$$
$$x = 3{,}4$$

Dus $EF = 2x = 6{,}8$.

37 $$\left.\begin{array}{l} P = aQ \\ Q = 120 \text{ en } P = 258 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 120a = 258 \\ a = 2{,}15 \end{array}$$

Dus $P = 2{,}15Q$.

38 $$\left.\begin{array}{l} y = ax + 3 \\ \text{door } A(4, 9) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4a + 3 = 9 \\ 4a = 6 \\ a = 1\frac{1}{2} \end{array}$$

Bladzijde 218

39 $y = \cos(x)$
$\downarrow$ verm. y-as, $\frac{1}{2}$
$y = \cos(2x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{6}\pi, -3)$
$f(x) = \cos\left(2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right) - 3$ ofwel $f(x) = \cos\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) - 3$

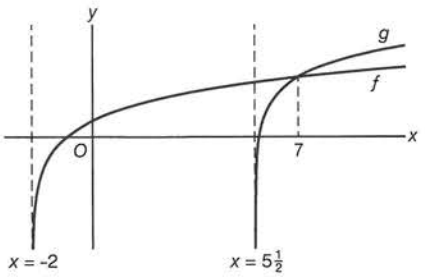
40 $g_{\text{week}} = 0{,}72$ geeft $g_{\text{dag}} = 0{,}72^{\frac{1}{7}} = 0{,}9541...$
Dus de afname per dag is 4,6%.

41 $x + 2 > 0$ geeft $x > -2$, dus $D_f = \langle -2, \rightarrow \rangle$.

$2x - 11 > 0$ geeft $x > 5\frac{1}{2}$, dus $D_g = \langle 5\frac{1}{2}, \rightarrow \rangle$.

$f(x) = g(x)$ geeft $^3\log(x + 2) = 1 + {}^3\log(2x - 11)$

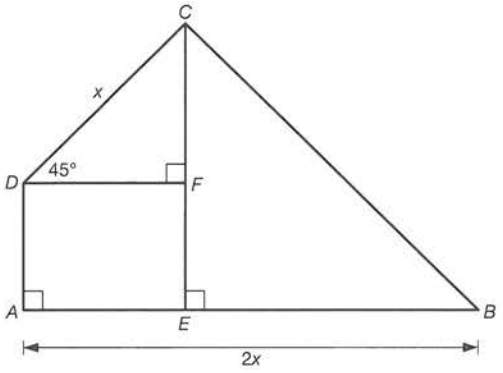
$$^3\log(x + 2) = {}^3\log(3) + {}^3\log(2x - 11)$$
$$^3\log(x + 2) = {}^3\log(3(2x - 11))$$
$$x + 2 = 3(2x - 11)$$
$$x + 2 = 6x - 33$$
$$-5x = -35$$
$$x = 7$$



$f(x) \geq g(x)$ geeft $5\frac{1}{2} < x \leq 7$

© Noordhoff Uitgevers bv

42 Teken de loodlijn CE op AB en de loodlijn DF op CE.



$CD = x$ geeft $DF = AE = \frac{x}{\sqrt{2}}$ en $CF = \frac{x}{\sqrt{2}}$

$AB = 2x$ en $AE = \frac{x}{\sqrt{2}}$ geeft $BE = 2x - \frac{x}{\sqrt{2}}$

$BE = 2x - \frac{x}{\sqrt{2}}$ geeft $CE = 2x - \frac{x}{\sqrt{2}}$ en $BC = \sqrt{2} \cdot \left(2x - \frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2x\sqrt{2} - x$

$CE = 2x - \frac{x}{\sqrt{2}}$ en $CF = \frac{x}{\sqrt{2}}$ geeft $EF = AD = 2x - 2 \cdot \frac{x}{\sqrt{2}} = 2x - x\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{omtrek } = 2x + 2x\sqrt{2} - x + x + 2x - x\sqrt{2} = 4x + x\sqrt{2} \\ \text{omtrek} = 24\end{array}\right\} 4x + x\sqrt{2} = 24$$

$$x\left(4 + \sqrt{2}\right) = 24$$

$$x = \frac{24}{4 + \sqrt{2}} = 4{,}432...$$

Dus $AB = 2 \cdot 4{,}432... \approx 8{,}87$.

43 ${}^2\log\left(\frac{1}{16} \cdot \sqrt[3]{2}\right) = {}^2\log\left(2^{-4} \cdot 2^{\frac{1}{3}}\right) = {}^2\log\left(2^{-3\frac{2}{3}}\right) = -3\frac{2}{3}$

44 De top is (4, 3), dus stel $y = a(x - 4)^2 + 3$.

$$\left.\begin{array}{l}y = a(x-4)^2 + 3 \\ \text{door } (2, -3)\end{array}\right\} a(2-4)^2 + 3 = -3$$

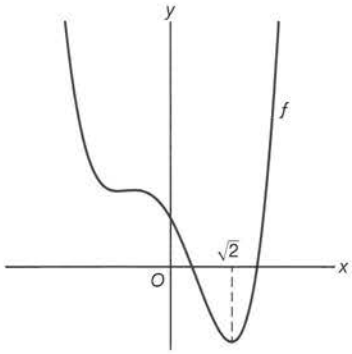
$$4a = -6$$

$$a = -1\tfrac{1}{2}$$

Dus $y = -1\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 3 = -1\frac{1}{2}(x^2 - 8x + 16) + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 24 + 3 = -1\frac{1}{2}x^2 + 12x - 21$.

45 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x + 1$ geeft $f'(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

$f'(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2} - 2 = 2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} - 2 = 0$



Dus f heeft een extreme waarde voor $x = \sqrt{2}$.

46 $\log(T) = 1{,}25 + 1{,}07\log(p)$

$\log(T) = \log(10^{1{,}25}) + \log(p^{1{,}07})$

$\log(T) = \log(10^{1{,}25} \cdot p^{1{,}07})$

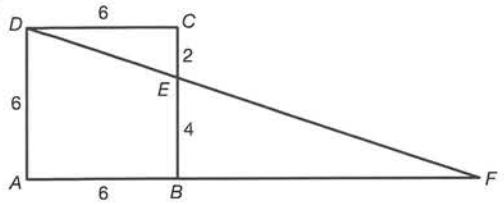
$T = 10^{1{,}25} \cdot p^{1{,}07}$

$T = 17{,}78... \cdot p^{1{,}07}$

Dus $T = 18p^{1{,}07}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

47



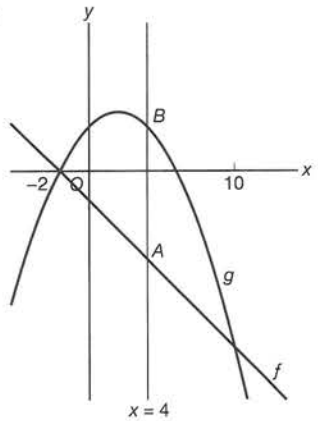
$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C\,(=90°)\\ \angle BEF = CED \text{ (overstaande hoeken)}\end{array}\right\}\triangle BEF \backsim \triangle CED$

Uit $\triangle BEF \backsim \triangle CED$ volgt

$\dfrac{BF}{CD} \Big| \dfrac{BE}{CE}$ en dit geeft $\dfrac{BF}{6} \Big| \dfrac{4}{2}$

Dus $BF = \dfrac{6 \cdot 4}{2} = 12$.

48



$AB = g(p) - f(p) = -\frac{1}{4}p^2 + p + 3 - (-p - 2) = -\frac{1}{4}p^2 + 2p + 5$

$p_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{-\frac{1}{2}} = 4$

Dus voor $p = 4$.

Bladzijde 219

49 $\log(N) = -0{,}035t + 1{,}54$

$N = 10^{-0{,}035t + 1{,}54}$

$N = 10^{-0{,}035t} \cdot 10^{1{,}54}$

$N = 0{,}9225...^{t} \cdot 34{,}6...$

Dus $N = 35 \cdot 0{,}923^{t}$.

50 $d(P, Q) = \sqrt{(q-2)^2 + (2q-3)^2} = \sqrt{q^2 - 4q + 4 + 4q^2 - 12q + 9} = \sqrt{5q^2 - 16q + 13}$

Voer in $y_1 = \sqrt{5x^2 - 16x + 13}$.

De optie minimum geeft $x = 1{,}6$ en $y = 0{,}447...$

Dus de minimale afstand tussen P en Q is ongeveer 0,45.

51 m: $3x + by = 2$

n: $y = 2x + p$ ofwel n: $-2x + y = p$

Geen gemeenschappelijke punten, dus $\dfrac{3}{-2} = \dfrac{b}{1} \neq \dfrac{2}{p}$.

$\dfrac{3}{-2} = \dfrac{b}{1}$ geeft $-2b = 3$ ofwel $b = -1\frac{1}{2}$

$\dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{2}{p}$ geeft $3p \neq -4$ ofwel $p \neq -1\frac{1}{3}$

Dus $b = -1\frac{1}{2}$ en $p \neq -1\frac{1}{3}$.

52 $5 + 3 \cdot \log(1500) = 5 + 3 \cdot \log(100 \cdot 15) = 5 + 3(\log(100) + \log(15)) = 5 + 3(2 + \log(15) =$
$11 + 3\log(15) = 11 + \log(15^3) = 11 + \log(3375)$

© Noordhoff Uitgevers bv

53 $\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{a}{x^n} \\ x = 3 \text{ en } y = 125 \end{array}\right\} \dfrac{a}{3^n} = 125$

$a = 125 \cdot 3^n$

$\left.\begin{array}{l} y = \dfrac{a}{x^n} \\ x = 5 \text{ en } y = 27 \end{array}\right\} \dfrac{a}{5^n} = 27$

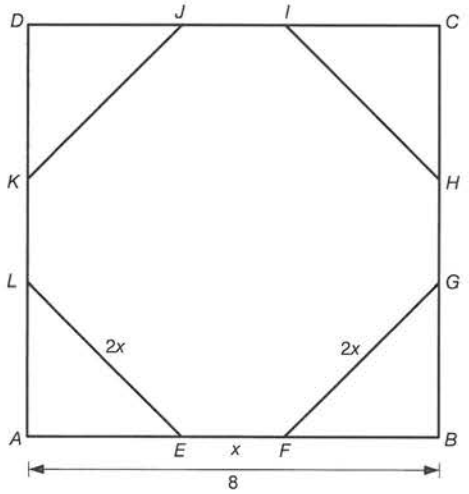
$a = 27 \cdot 5^n$

Voer in $y_1 = 125 \cdot 3^n$ en $y_2 = 27 \cdot 5^n$.
Intersect geeft $x = 3$ en $y = 3375$.
Dus $a = 3375$ en $n = 3$.
Dus de formule is $y = \dfrac{3375}{x^3}$.

54 $g_{\text{jaar}} = 1{,}25$ geeft $g_{\text{kwartaal}} = 1{,}25^{\frac{1}{4}} = 1{,}0573...$
Dus de hoeveelheid neemt per kwartaal met 5,7% toe.

55 Voer in $y_1 = -0{,}2x^3 + 0{,}3x^2 + 2x - 2$.
De optie zero (TI) of ROOT (Casio) geeft $x = -2{,}980... \vee x = 0{,}950... \vee x = 3{,}530...$
Dus de nulpunten zijn -2,98, 0,95 en 3,53.

56 Stel $EF = x$, dan is $EL = FG = 2x$.



$EL = FG = 2x$ geeft $AE = BF = \dfrac{2x}{\sqrt{2}} = x\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} AB = 8 \\ AB = AE + EF + BF \end{array}\right\} x\sqrt{2} + x + x\sqrt{2} = 8$

$2x\sqrt{2} + x = 8$

$x(2\sqrt{2} + 1) = 8$

$x = \dfrac{8}{2\sqrt{2} + 1}$

Dus $EF = \dfrac{8}{2\sqrt{2} + 1}$.

57 $f(x) = x^2 - \dfrac{2x^2 - 1}{x} = x^2 - 2x + \dfrac{1}{x} = x^2 - 2x + x^{-1}$ geeft $f'(x) = 2x - 2 - x^{-2} = 2x - 2 - \dfrac{1}{x^2}$

58 $x^3 + 10x = 7x^2$
$x^3 - 7x^2 + 10x = 0$
$x(x^2 - 7x + 10) = 0$
$x(x - 2)(x - 5) = 0$
$x = 0 \vee x = 2 \vee x = 5$

© Noordhoff Uitgevers bv

59 $f(x) = (2x+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x} - 2x + \sqrt{x} - 1 = 2x^{1\frac{1}{2}} - 2x + \sqrt{x} - 1$ geeft

$f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}} - 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} - 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

60 Voer in $y_1 = \cos^2(x) - \cos(2x)$.
De optie maximum geeft het punt (1,570..., 1) ofwel $(\frac{1}{2}\pi, 1)$.
De optie minimum geeft het punt (0, 0).

evenwichtsstand $\dfrac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$

amplitude $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

periode π

stijgend door beginpunt $\left(\dfrac{0+\frac{1}{2}\pi}{2}, \dfrac{0+1}{2}\right)$ ofwel $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2})$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2\left(x - \frac{1}{4}\pi\right)\right)$ ofwel $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{1}{2}\pi\right)$

Bladzijde 220

61 $A = 2 - \sqrt{1-B}$
$\sqrt{1-B} = 2 - A$
$1 - B = 4 - 4A + A^2$
$-B = 3 - 4A + A^2$
$B = -A^2 + 4A - 3$

62 $6 - 2^{3x+2} = 1$
$-2^{3x+2} = -5$
$2^{3x+2} = 5$
$3x + 2 = {}^2\log(5)$
$3x = -2 + {}^2\log(5)$
$x = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot {}^2\log(5)$

63 Substitutie van $y = 4x + 11$ in $5x + 6y = 18$ geeft $5x + 6(4x + 11) = 18$

$5x + 24x + 66 = 18$
$29x = -48$
$\left.\begin{array}{l} x = -1\frac{19}{29} \\ y = 4x + 11 \end{array}\right\} y = 4\frac{11}{29}$

Dus de oplossing is $(x, y) = \left(-1\frac{19}{29}, 4\frac{11}{29}\right)$.

64 $g^6 = \dfrac{219}{178} = 1{,}230...$ geeft $g = 1{,}230...^{\frac{1}{6}} = 1{,}0351...$

$\left.\begin{array}{l} N = a \cdot 1{,}0351...^t \\ t = 5 \text{ en } N = 178 \end{array}\right\} a \cdot 1{,}0351...^5 = 178$

$a = \dfrac{178}{1{,}0351...^5} = 149{,}76...$

Dus $N = 150 \cdot 1{,}035^t$.

65 $\left(\frac{1}{4}a\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{16}a^2 \cdot 3 + \frac{1}{9}a^2 \cdot 2 = \frac{3}{16}a^2 + \frac{2}{9}a^2 = \frac{59}{144}a^2$

66 $\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2(x+1) - x(x+1) + x^2}{x^2(x+1)} = \dfrac{2x + 2 - x^2 - x + x^2}{x^2(x+1)} = \dfrac{x+2}{x^2(x+1)}$

67 evenwichtsstand $\dfrac{-1+5}{2} = 2$

amplitude $5 - 2 = 3$

periode $1\frac{1}{3}\pi$

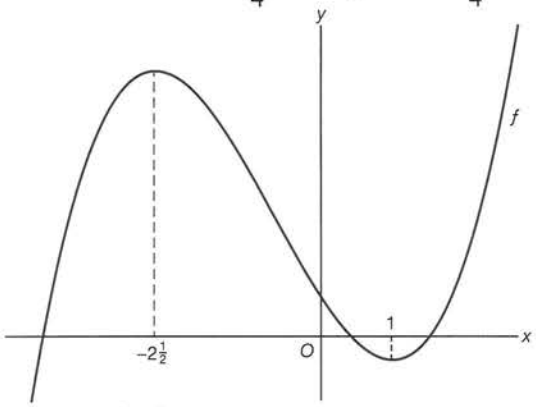
stijgend door beginpunt $(\frac{1}{3}\pi, 2)$

$y = 2 + 3\sin\left(1\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\pi\right)\right)$

© Noordhoff Uitgevers bv

68 $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 30x + 10$ geeft $f'(x) = 12x^2 + 18x - 30$
$f'(x) = 0$ geeft $12x^2 + 18x - 30 = 0$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0$$
$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot -5 = 49$$
$$x = \frac{-3-7}{4} = -2\tfrac{1}{2} \vee x = \frac{-3+7}{4} = 1$$



max. is $f\left(-2\tfrac{1}{2}\right) = 78\tfrac{3}{4}$.
min. is $f(1) = -7$.

69 Voer in $y_1 = -0{,}1x^3 + 0{,}1x^2 + 3x - 2$.
De helling (richtingscoëfficiënt) van AB is $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5{,}2 - -4{,}8}{3 - -1} = \dfrac{10}{4} = 2\tfrac{1}{2}$.

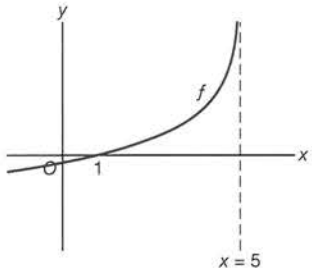
70 De evenwichtsstand is $\dfrac{60 + 110}{2} = 85$, dus $a = 85$.
De amplitude is $110 - 85 = 25$, dus $b = 25$.
De periode is $2 \cdot (15 - 5) = 20$, dus $c = \dfrac{2\pi}{20} = \tfrac{1}{10}\pi$.
Stijgend door de evenwichtsstand in het punt (10, 85), dus $d = 10$.
Dit geeft de formule $N = 85 + 25\sin\left(\tfrac{1}{10}\pi(x - 10)\right)$.
$t = 7$ geeft $N \approx 64{,}77$

Bladzijde 221

71 $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{(3x-1)^2} = 4x^{-2} - (3x-1)^{-2}$ geeft $f'(x) = -8x^{-3} - 3 \cdot -2(3x-1)^{-3} = -\dfrac{8}{x^3} + \dfrac{6}{(3x-1)^3}$

72 $10 - 2x > 0$ geeft $x < 5$, dus $D_f = \langle \leftarrow, 5 \rangle$.
$f(x) = 0$ geeft $3 - {}^2\log(10 - 2x) = 0$

$${}^2\log(10 - 2x) = 3$$
$$10 - 2x = 8$$
$$-2x = -2$$
$$x = 1$$



$f(x) \geq 0$ geeft $1 \leq x < 5$

73 $4\sqrt{20a^2} - \sqrt{45a^2} = 4 \cdot 2a\sqrt{5} - 3a\sqrt{5} = 5a\sqrt{5}$

© Noordhoff Uitgevers bv

74 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(115°) = 35{,}14...$

$$BC = \sqrt{35{,}14...} = 5{,}928...$$

Dus $BC \approx 5{,}93$.

75 $(2x-1)^2 = 10x + 1$

$4x^2 - 4x + 1 = 10x + 1$

$4x^2 - 14x = 0$

$2x(2x-7) = 0$

$x = 0 \vee x = 3\frac{1}{2}$

76 $\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx \\ x = 6 \text{ en } h = 1{,}44 \end{array}\right\} 36a + 6b = 1{,}44$

$\left.\begin{array}{l} h = ax^2 + bx \\ x = 15 \text{ en } h = 3 \end{array}\right\} 225a + 15b = 3$

$\left\{\begin{array}{l} 36a + 6b = 1{,}44 \\ 225a + 15b = 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} 5 \\ 2 \end{array}\Big|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 180a + 30b = 7{,}2 \\ 450a + 30b = 6 \end{array}\right.$ $-$

$-270a = 1{,}2$

$\left.\begin{array}{l} a = -\frac{1}{225} \\ 225a + 15b = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 + 15b = 3 \\ 15b = 4 \\ b = \frac{4}{15} \end{array}$

Dus $h = -\frac{1}{225}x^2 + \frac{4}{15}x$

$x_{\text{top}} = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{\frac{4}{15}}{-\frac{2}{225}} = 30$

De bal komt dus na $2 \cdot 30 = 60$ meter op de grond.

77 $\frac{1}{2}x\sqrt{6} - 2 = \sqrt{30}$

$x\sqrt{6} - 4 = 2\sqrt{30}$

$x\sqrt{6} = 4 + 2\sqrt{30}$

$x = \dfrac{4 + 2\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4}{\sqrt{6}} + \dfrac{2\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{6}}{6} + 2\sqrt{\dfrac{30}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$

78 $g^3 = \dfrac{795}{942} = 0{,}8439...$ geeft $g = 0{,}8439...^{\frac{1}{3}} = 0{,}9450...$

$\left.\begin{array}{l} H = a \cdot 0{,}9450...^t \\ t = 5 \text{ en } H = 942 \end{array}\right\} a \cdot 0{,}9450...^5 = 942$

$a = \dfrac{942}{0{,}9450...^5} = 1249{,}8...$

Dus $H = 1250 \cdot 0{,}945^t$.

79 k: $2x + y = 3$

$y = -2x + 3$

$\tan(\alpha) = -2$ geeft $\alpha = -63{,}43...°$

l: $3x - 2y = 5$

$-2y = -3x + 5$

$y = 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}$

$\tan(\beta) = 1\frac{1}{2}$ geeft $\beta = 56{,}30...°$

$\beta - \alpha = 119{,}74...°$

Dus $\angle(k, l) = 180° - 119{,}74...° \approx 60{,}3°$.

80 Voer in $y_1 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - x + 2$.

De optie maximum geeft $x = -0{,}5$ en $y = 2{,}270...$

De optie minimum geeft $x = 2$ en $y = -0{,}333...$

Dus max. is $f(-0{,}5) \approx 2{,}27$ en min. is $f(2) \approx -0{,}33$.

© Noordhoff Uitgevers bv

81 $f(x) = g(x)$ geeft $1 + \sqrt{2x} = 3x - 3$

$\sqrt{2x} = 3x - 4$

kwadrateren geeft

$2x = 9x^2 - 24x + 16$

$9x^2 - 26x + 16 = 0$

$D = (-26)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16 = 100$

$x = \frac{26 - 10}{18} \vee x = \frac{26 + 10}{18}$

$x = \frac{8}{9} \quad \vee \quad x = 2$

vold. niet vold.

$f(x) = 1 + \sqrt{2x}$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

$f'(2) = \frac{1}{2}$

$\tan(\alpha) = \frac{1}{2}$ geeft $\alpha = 26{,}56...°$

$\tan(\beta) = 3$ geeft $\beta = 71{,}56...°$

$\beta - \alpha = 71{,}56...° - 26{,}56...° = 45°$

Dus de gevraagde hoek is 45°.

82 Voer in $y_1 = -0{,}1x^3 + 0{,}1x^2 + 3x - 2$.

Het differentiequotiënt is $\frac{f(4) - f(-2)}{4 - -2} = \frac{5{,}2 - -6{,}8}{6} = \frac{12}{6} = 2$.

83 $N = a \cdot F^{1,5}$, dus bereken telkens $\frac{N}{F^{1,5}}$.

$\frac{13{,}0}{3^{1,5}} = 2{,}501...$, $\frac{46{,}3}{7^{1,5}} = 2{,}499...$, $\frac{67{,}5}{9^{1,5}} = 2{,}5$ en $\frac{145{,}2}{15^{1,5}} = 2{,}499...$

Vrijwel gelijke uitkomsten, dus N is evenredig met $F^{1,5}$ en de formule is $N = 2{,}5F^{1,5}$.

84 $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4} = 2$

$\frac{x(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = 2$

$\frac{x}{x + 2} = 2$

$x = 2x + 4$

$-x = 4$

$x = -4$

vold.

Bladzijde 222

85 $\left.\begin{array}{l} A = \frac{a}{B} \\ B = 16 \text{ en } A = 15 \end{array}\right\} a = 16 \cdot 15 = 240$

Dus $A = \frac{240}{B}$.

$B = 18$ geeft $A = \frac{240}{18} = 13\frac{1}{3}$.

86 $N = 8500 \cdot 0{,}925^t$

$\log(N) = \log(8500 \cdot 0{,}925^t)$

$\log(N) = \log(8500) + \log(0{,}925^t)$

$\log(N) = 3{,}929... + t \log(0{,}925)$

$\log(N) = 3{,}929... + t \cdot -0{,}0338...$

Dus $\log(N) = -0{,}034t + 3{,}93$.

87 $(x^2 - 9)\sqrt{x + 6} = x^2 - 9$

$x^2 - 9 = 0 \vee \sqrt{x + 6} = 1$

$x^2 = 9 \vee x + 6 = 1$

$x = 3 \vee x = -3 \vee x = -5$

vold. vold. vold.

© Noordhoff Uitgevers bv

88 $g_{103\text{ jaar}} = \frac{1}{2}$ geeft $g_{1\text{ jaar}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{103}} = 0{,}9932...$
Dus de hoeveelheid neemt per jaar af met 0,7%.

89 $\sin\left(3x - \frac{1}{4}\pi\right) = 1$

$3x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$

$3x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot 2\pi$

$x = \frac{1}{4}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{1}{4}\pi \vee x = \frac{11}{12}\pi \vee x = 1\frac{7}{12}\pi$.

90 $\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \\ \text{door } (-2, -3) \end{array}\right\}$ $-2 - 2b + c = -3$ ofwel $-2b + c = -1$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c \\ \text{door } (6, 5) \end{array}\right\}$ $-18 + 6b + c = 5$ ofwel $6b + c = 23$

$$\begin{cases} -2b + c = -1 \\ 6b + c = 23 \end{cases} -$$
$$-8b = -24$$
$$\left.\begin{array}{l} b = 3 \\ -2b + c = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2 \cdot 3 + c = -1 \\ -6 + c = -1 \\ c = 5 \end{array}$$
Dus $b = 3$ en $c = 5$.

91 $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0 \\ y = x \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x^2 + x^2 - 8x - 6x + 12 = 0 \\ 2x^2 - 14x + 12 = 0 \\ x^2 - 7x + 6 = 0 \\ (x - 1)(x - 6) = 0 \\ x = 1 \vee x = 6 \end{array}$

Dus $A(1, 1)$ en $B(6, 6)$.

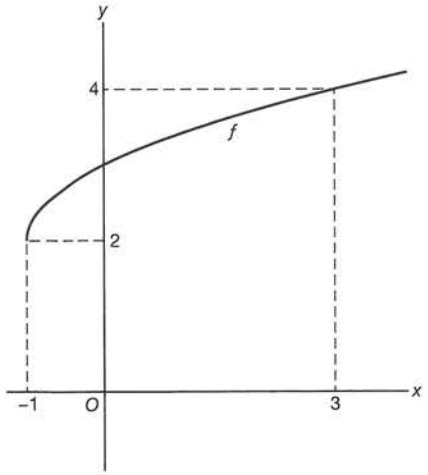
92 $\dfrac{x^2 - x - 20}{x^2 - 2x - 24} = \dfrac{(x + 4)(x - 5)}{(x + 4)(x - 6)} = \dfrac{x - 5}{x - 6}$ mits $x \neq -4$

93 Het midden M van AB is $\left(\dfrac{-2 + 4}{2}, \dfrac{2 + 5}{2}\right) = \left(1, 3\frac{1}{2}\right)$.

$r = d(M, A) = \sqrt{(1 - -2)^2 + \left(3\frac{1}{2} - 2\right)^2} = \sqrt{9 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{11\frac{1}{4}}$

Dus c: $(x - 1)^2 + \left(y - 3\frac{1}{2}\right)^2 = 11\frac{1}{4}$.

94 $x + 1 \geq 0$ geeft $x \geq -1$



Het beginpunt is $(-1, 2)$ en $f(3) = 4$.
$x \leq 3$ geeft $2 \leq f(x) \leq 4$

© Noordhoff Uitgevers bv

95 $y = 2 + 3^{0,2x-1}$
$3^{0,2x-1} = y - 2$
$0,2x - 1 = {}^{3}\log(y-2)$
$0,2x = 1 + {}^{3}\log(y-2)$
$x = 5 + 5 \cdot {}^{3}\log(y-2)$

96 $y = \frac{4}{x^2} \cdot 3\sqrt{x} = 4x^{-2} \cdot 3x^{\frac{1}{2}} = 12x^{-1\frac{1}{2}}$

97 $2\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi\right) = \sqrt{3}$
$\cos\left(1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{6}\pi + k \cdot 2\pi$
$1\frac{1}{2}x = \frac{5}{12}\pi + k \cdot 2\pi \vee 1\frac{1}{2}x = \frac{1}{12}\pi + k \cdot 2\pi$
$x = \frac{5}{18}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$
x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \frac{5}{18}\pi \vee x = 1\frac{11}{18}\pi \vee x = \frac{1}{18}\pi \vee x = 1\frac{7}{18}\pi$.

98 $\log(25x) = 2 + \log(x-1)$
$\log(25x) = \log(100) + \log(x-1)$
$\log(25x) = \log(100(x-1))$
$25x = 100(x-1)$
$25x = 100x - 100$
$-75x = -100$
$x = 1\frac{1}{3}$
vold.

99 $f(x) = 0,2x^2 - 2x + 1$
$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{0,4} = 5$
$y_{\text{top}} = f(5) = 0,2 \cdot 5^2 - 2 \cdot 5 + 1 = -4$
$g(5) = -0,3 \cdot 5^2 + 0,5 \cdot 5 + 1 = -7,5 + 2,5 + 1 = -4$
Dus de top $(5, -4)$ ligt op de grafiek van $g(x) = -0,3x^2 + 0,5x + 1$.

100 $y = 4 + \sqrt{6x - x^2}$
$y - 4 = \sqrt{6x - x^2}$
kwadrateren geeft
$y^2 - 8y + 16 = 6x - x^2$
$x^2 - 6x + y^2 - 8y + 16 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + 16 = 0$
$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$
Omdat $y \geq 4$ moet zijn, is de grafiek van f een halve cirkel met middelpunt $(3, 4)$ en straal 3.
Dus is $B_f = [4, 7]$.

Bladzijde 223

101 $c: x^2 + y^2 - 6x + 4y - 7 = 0$
$x^2 - 6x + y^2 + 4y - 7 = 0$
$(x-3)^2 - 9 + (y+2)^2 - 4 - 7 = 0$
$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 20$
Dus $M(3, -2)$ en $r = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
$d(A, M) = \sqrt{(5-3)^2 + (0 - -2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
$d(A, c) = r - d(A, M) = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

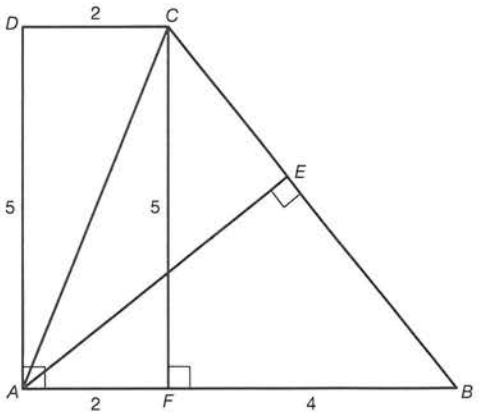
102 $\frac{s(5,01) - s(5)}{0,01} = \frac{33,42219... - 33,33333}{0,01} = \frac{0,08885...}{0,01} = 8,885...$
Dus $\frac{ds}{dt} \approx 8,89$ m/s.

© Noordhoff Uitgevers bv

103 Teken CF loodrecht op AB.
De stelling van Pythagoras in $\triangle FBC$ geeft $BC^2 = FB^2 + FC^2 = 4^2 + 5^2 = 41$, dus $BC = \sqrt{41}$.
De zijde × hoogte-methode in $\triangle ABC$ geeft $BC \cdot AE = AB \cdot h$

$$\sqrt{41} \cdot AE = 6 \cdot 5$$

$$AE = \frac{30}{\sqrt{41}}$$



104 $\dfrac{a^4}{\sqrt[5]{a^2}} = \dfrac{a^4}{a^{\frac{2}{5}}} = a^{3\frac{3}{5}}$

105 $\left.\begin{array}{r} l\text{: } 4x + 3y = 20\text{, dus } k\text{: } 3x - 4y = c \\ \text{door } A(-1, 3) \end{array}\right\} c = 3 \cdot -1 - 4 \cdot 3 = -15$
Dus k: $3x - 4y = -15$.

106 De lijn l staat loodrecht op k en gaat door het punt A.
$\left.\begin{array}{r} k\text{: } x + 2y = 4 \text{ geeft } l\text{: } 2x - y = c \\ \text{door } A(4, 5) \end{array}\right\} c = 2 \cdot 4 - 5 = 3$
Dus l: $2x - y = 3$.
l snijden met k geeft het snijpunt S.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right| \text{ geeft } \left\{\begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 6 \end{array}\right. +$$

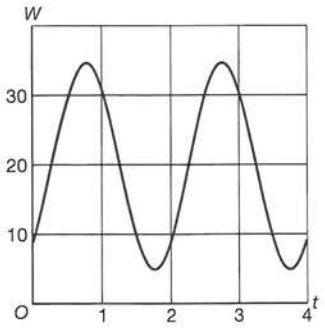
$$\begin{array}{l} 5x = 10 \\ x = 2 \\ x + 2y = 4 \end{array} \Bigg\} \begin{array}{l} 2 + 2y = 4 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}$$

Dus $S(2, 1)$.
$d(A, k) = d(A, S) = \sqrt{(4-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

107 Voor erg grote x is $f(x) = 4 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \approx 4 - 3 \cdot 0 = 4$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 4$.
$x + 2 = 0$ geeft $x = -2$, dus de verticale asymptoot van de grafiek van $g(x) = 5 - {}^3\log(x + 2)$ is de lijn $x = -2$.

108 $W = 20 + 15\cos\left(\pi\left(t - \frac{3}{4}\right)\right)$
evenwichtsstand 20
amplitude 15
periode $\dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

beginpunt $\left(\frac{3}{4}, 35\right)$ is hoogste punt



109 $f(x) = 5x^2 - (2x + 3)^4$ geeft $f'(x) = 10x - 2 \cdot 4 \cdot (2x + 3)^3 = 10x - 8(2x + 3)^3$

110 $4 \cdot 2^x = 4^{2x-1}$
$2^2 \cdot 2^x = (2^2)^{2x-1}$
$2^{2+x} = 2^{4x-2}$
$2 + x = 4x - 2$
$-3x = -4$
$x = 1\frac{1}{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

111 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2$ geeft $f'(x) = x^2 - x$

$f'(x) = 6$ geeft $x^2 - x = 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

$x = -2 \vee x = 3$

$f(-2) = -2\frac{2}{3}$ en $f(3) = 6\frac{1}{2}$

Dus $A\left(-2, -2\frac{2}{3}\right)$ en $B\left(3, 6\frac{1}{2}\right)$.

112 $4 - 3x = 0$ geeft $x = 1\frac{1}{3}$, dus de verticale asymptoot is de lijn $x = 1\frac{1}{3}$.

Voor grote x is $f(x) \approx 1 - \dfrac{2x}{-3x} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$, dus de horizontale asymptoot is de lijn $y = 1\frac{2}{3}$.

Bladzijde 224

113 $y = 50x^{1,43}$

$\log(y) = \log(50x^{1,43}) = \log(50) + \log(x^{1,43}) = 1,6990 + 1,43\log(x)$

Dus $\log(y) = 1,70 + 1,43\log(x)$.

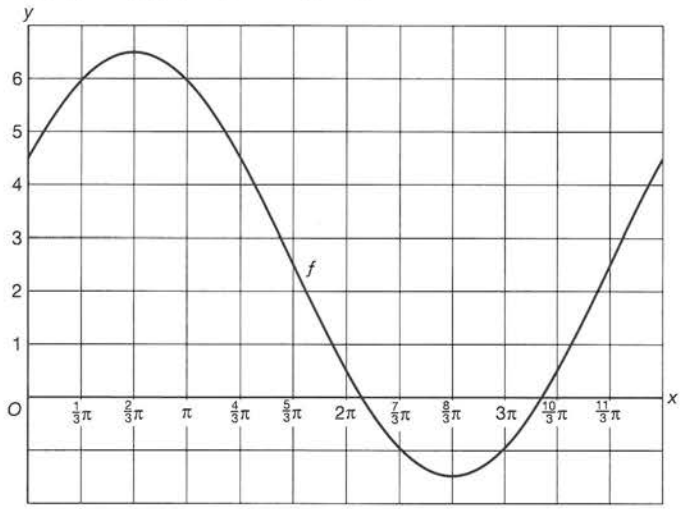
114 $f(x) = 2\frac{1}{2} - 4\cos\left(\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{3}\pi\right) = 2\frac{1}{2} - 4\cos\left(\frac{1}{2}\left(x - 2\frac{2}{3}\pi\right)\right)$

evenwichtsstand $2\frac{1}{2}$

amplitude 4

periode $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

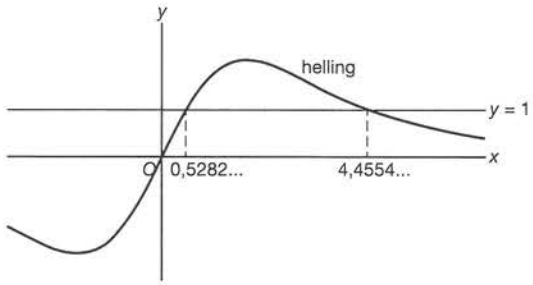
beginpunt $\left(2\frac{2}{3}\pi, -1\frac{1}{2}\right)$ is laagste punt



115 $f(x) = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{2x + 1}$ geeft $f'(x) = 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x - 1}} + 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2x + 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x - 1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}}$

116 Voer in $y_1 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 10}$, $y_2 = \left[\dfrac{dy_1}{dx}\right]_{x = x}$ en $y_3 = 1$.

Intersect met y_2 en y_3 geeft $x = 0,5282...$ en $x = 4,4554...$



helling > 1 geeft $0,528 < x < 4,455$.

© Noordhoff Uitgevers bv

117 $\text{rc}_k = \dfrac{2-0}{0--3} = \frac{2}{3}$

$\tan(\alpha) = \frac{2}{3}$ geeft $\alpha = 33{,}69...°$

$\text{rc}_l = \dfrac{5--2}{4-1} = \frac{7}{3}$

$\tan(\beta) = \frac{7}{3}$ geeft $\alpha = 66{,}80...°$

$\alpha - \beta = 33{,}69...° - 66{,}80...° = 33{,}11...°$

Dus $\angle(k, l) \approx 33{,}1°$.

118 $\left.\begin{array}{l} c\colon (x-4)^2 + (y-3)^2 = 13 \\ y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} (x-4)^2 + 9 = 13 \\ (x-4)^2 = 4 \\ x - 4 = 2 \vee x - 4 = -2 \\ x = 6 \vee x = 2 \end{array}$

Dus $A(2, 0)$ en $B(6, 0)$.

$\text{rc}_{AM} = \dfrac{3-0}{4-2} = \frac{3}{2}$, dus $\text{rc}_k = -\frac{2}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{2}{3}x + b \\ \text{door } A(2,0) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} -\frac{2}{3} \cdot 2 + b = 0 \\ -1\frac{1}{3} + b = 0 \\ b = 1\frac{1}{3} \end{array}$

Dus $k\colon y = -\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{3}$.

$\text{rc}_{BM} = \dfrac{3-0}{4-6} = -\frac{3}{2}$, dus $\text{rc}_l = \frac{2}{3}$

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x + b \\ \text{door } B(6,0) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} \frac{2}{3} \cdot 6 + b = 0 \\ 4 + b = 0 \\ b = -4 \end{array}$

Dus $l\colon y = \frac{2}{3}x - 4$.

119 $\cos\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

$\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$

$\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\pi + k \cdot \pi$

$x = \pi + k \cdot 1\frac{1}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x = \pi$.

120 $5 + 3 \cdot {}^2\log(a) - {}^2\log(ab) = {}^2\log(32) + {}^2\log(a^3) - {}^2\log(ab) = {}^2\log\left(\dfrac{32a^3}{ab}\right) = {}^2\log\left(\dfrac{32a^2}{b}\right)$

121 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$\downarrow$ translatie $(-2, -3)$

$f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+2} - 3$

122 $2x - 3 \geq 0$ geeft $x \geq 1\frac{1}{2}$, dus $\text{D}_f = \left[1\frac{1}{2}, \rightarrow\right\rangle$.

Het beginpunt is $\left(1\frac{1}{2}, 6\right)$ en $\text{B}_f = \langle\leftarrow, 6]$.

123 Teken AC.

In $\triangle ABC$ geeft de cosinusregel $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos(\angle B)$

$AC^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos(65°)$

$AC^2 = 65{,}66...$

$AC = 8{,}103...$

In $\triangle ABC$ geeft de sinusregel $\dfrac{AC}{\sin(\angle B)} = \dfrac{BC}{\sin(\angle BAC)}$

$\dfrac{8{,}103...}{\sin(65°)} = \dfrac{7}{\sin(\angle BAC)}$

$\sin(\angle BAC) = \dfrac{7\sin(65°)}{8{,}103...} = 0{,}782...$

$\angle BAC = 51{,}52...° \vee \angle BAC = 128{,}47...°$

vold. vold. niet

$\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 75° - 51{,}52...° = 23{,}47...°$

© Noordhoff Uitgevers bv

In $\triangle ACD$ geeft de cosinusregel $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AD \cdot AC \cdot \cos(23{,}47...°)$

$CD^2 = 4^2 + 8{,}103...^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8{,}103... \cdot \cos(23{,}47...°)$

$CD^2 = 22{,}2...$

$CD = \sqrt{22{,}2...} = 4{,}712...$

In $\triangle ACD$ geeft de sinusregel $\dfrac{CD}{\sin(\angle CAD)} = \dfrac{AC}{\sin\angle D}$

$$\frac{4{,}712...}{\sin(23{,}47...°)} = \frac{8{,}103...}{\sin(\angle D)}$$

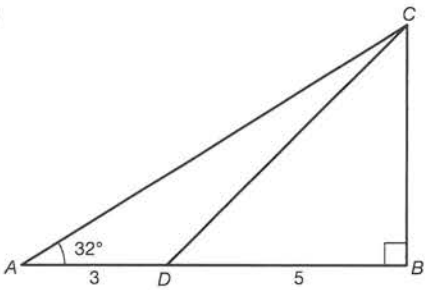
$$\sin(\angle D) = \frac{8{,}103...\sin(23{,}47...°)}{4{,}712...} = 0{,}685...$$

$\angle D \approx 43{,}2° \vee \angle D \approx 136{,}8°$

vold. niet vold.

Dus $CD \approx 4{,}7$ en $\angle D \approx 136{,}8°$.

124



In $\triangle ABC$ is $\tan(\angle A) = \dfrac{BC}{AB}$

$\tan(32°) = \dfrac{BC}{8}$

$BC = 8\tan(32°) = 4{,}99...$

In $\triangle DBC$ is $\tan(\angle BCD) = \dfrac{BD}{BC}$

$\tan(\angle BCD) = \dfrac{5}{4{,}99...}$

$\angle BCD = 45{,}00...°$

$\angle ACB = 180° - 90° - 32° = 58°$

$\angle ACD = \angle ACB - \angle BCD = 58° - 45{,}00...° \approx 13{,}0°$

125 c: $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 3 = 0$

$x^2 - 6x + y^2 + 4y + 3 = 0$

$(x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 + 3 = 0$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 10$

Dus $M(3, _2)$ en $r = \sqrt{10}$.

$\text{rc}_{MA} = \dfrac{-2 - -1}{3 - 6} = \frac{1}{3}$, dus $\text{rc}_k = -3$.

k: $y = -3x + b$ door $A(6, -1)$ $\Big\}$ $-3 \cdot 6 + b = -1$

$-18 + b = -1$

$b = 17$

Dus k: $y = -3x + 17$.

Bladzijde 225

126 $x^2 + y^2 + 4x - 2y = 0$

$x^2 + 4x + y^2 - 2y = 0$

$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 = 0$

$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$

Dus $M_1(-2, 1)$ en $r_1 = \sqrt{5}$.

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$

$x^2 - 8x + y^2 - 6y + 15 = 0$

$(x - 4)^2 - 16 + (y - 3)^2 - 9 + 15 = 0$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 10$

Dus $M_2(4, 3)$ en $r_2 = \sqrt{10}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

$d(M_1, M_2) = \sqrt{(4 - -2)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

$d(c_1, c_2) = 2\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{10} = \sqrt{10} - \sqrt{5}$

127 $y = {}^5\log(x)$

$\downarrow$ translatie (3, 2)

$f(x) = 2 + {}^5\log(x - 3)$

128 Stel $y = a + b\sin(c(x - d))$.

De evenwichtsstand is $\frac{160 + 90}{2} = 125$, dus $a = 125$.

De amplitude is $160 - 125 = 35$.

De periode is $2 \cdot (15 - 3) = 24$, dus $c = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$.

De grafiek gaat dalend door de evenwichtsstand in het punt $\left(\frac{3 + 15}{2}, \frac{160 + 90}{2}\right) = (9, 125)$.

Dus $b = -35$ en $d = 9$.

Dit geeft de formule $y = 125 - 35\sin\left(\frac{1}{12}\pi(x - 9)\right)$.

129 $4(5x - 2)^3 = 500$

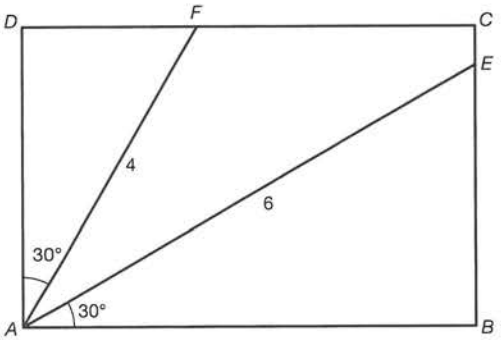
$(5x - 2)^3 = 125$

$5x - 2 = 5$

$5x = 7$

$x = 1\frac{2}{5}$

130



$AF = 4$ geeft $DF = 2$ en $AD = 2\sqrt{3}$.

$AE = 6$ geeft $BE = 3$ en $AB = 3\sqrt{3}$.

De oppervlakte van de rechthoek is $AB \cdot AD = 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 18$.

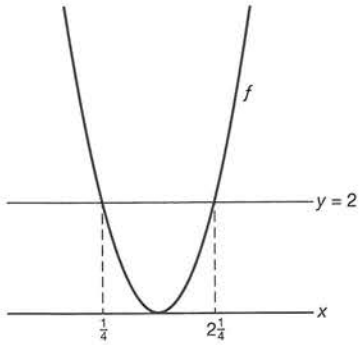
131 $\frac{1}{8}(4x - 5)^2 = 2$ geeft $\frac{1}{8}(4x - 5)^2 = 2$

$(4x - 5)^2 = 16$

$4x - 5 = 4 \vee 4x - 5 = -4$

$4x = 9 \vee 4x = 1$

$x = 2\frac{1}{4} \vee x = \frac{1}{4}$



$\frac{1}{8}(4x - 5)^2 < 2$ geeft $\frac{1}{4} < x < 2\frac{1}{4}$

© Noordhoff Uitgevers bv

132 $2x - \sqrt{x} = 3$
$2x - 3 = \sqrt{x}$
kwadrateren geeft
$4x^2 - 12x + 9 = x$
$4x^2 - 13x + 9 = 0$
$D = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 25$
$x = \frac{13-5}{8} \vee x = \frac{13+5}{8}$
$x = 1 \quad \vee \quad x = 2\frac{1}{4}$
vold. niet vold.

133 $N = \frac{t^3 - t}{t^2 - 2t + 1} = \frac{t(t^2-1)}{(t-1)^2} = \frac{t(t+1)(t-1)}{(t-1)^2} = \frac{t(t+1)}{t-1}$

134 $\angle F = 180° - 100° - 35° = 45°$
De sinusregel in $\triangle DEF$ geeft $\frac{DE}{\sin(45°)} = \frac{10{,}2}{\sin(100°)}$

$$DE = \frac{10{,}2 \cdot \sin(45°)}{\sin(100°)} = 7{,}323...$$

en $\frac{DF}{\sin(35°)} = \frac{10{,}2}{\sin(100°)}$

$$DF = \frac{10{,}2 \cdot \sin(35°)}{\sin(100°)} = 5{,}940...$$

Dus $DE \approx 7{,}3$ en $DF \approx 5{,}9$.

135 $x - 3 \geq 0$ geeft $x \geq 3$, dus $D_f = [3, \rightarrow\rangle$.
Het beginpunt is (3, 2) en $B_f = [2, \rightarrow\rangle$.

136 $5\sqrt{x} - x = 6$
$5\sqrt{x} = x + 6$
kwadrateren geeft
$25x = x^2 + 12x + 36$
$x^2 - 13x + 36 = 0$
$(x-4)(x-9) = 0$
$x = 4 \vee x = 9$
vold. vold.

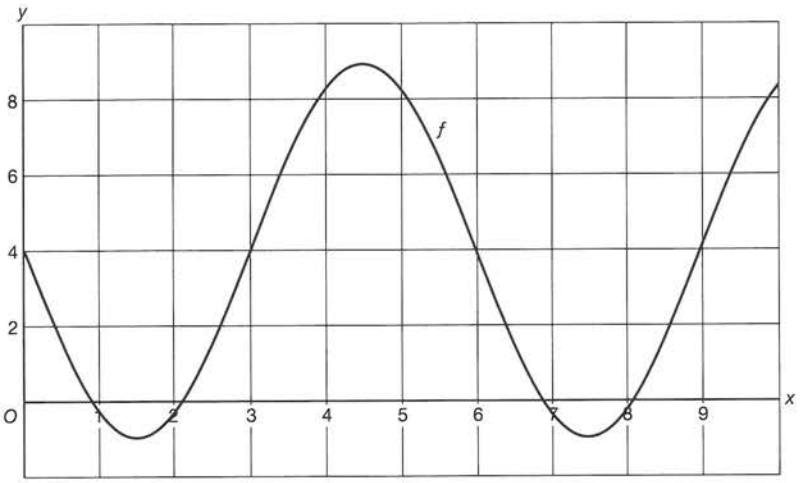
137 $\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 3} = 0$
$x^2 - 2x - 3 = 0$
$(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1 \vee x = 3$
vold. vold.

138 $\frac{3}{4}a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{a^{\frac{2}{3}}} \cdot \sqrt[5]{b} = \frac{3 \cdot \sqrt[5]{b}}{4 \cdot \sqrt[3]{a^2}}$

139 $y = \sin(x)$
$\downarrow$ translatie $(\frac{1}{3}\pi, 2)$
$y = \sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 2$
$\downarrow$ verm. x-as, $1\frac{1}{2}$
$f(x) = 1\frac{1}{2}\sin\left(x - \frac{1}{3}\pi\right) + 3$

© Noordhoff Uitgevers bv

140 $f(x) = 4 - 5\sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right)$
evenwichtsstand 4
amplitude 5
periode $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}\pi} = 6$
dalend door beginpunt (0, 4)



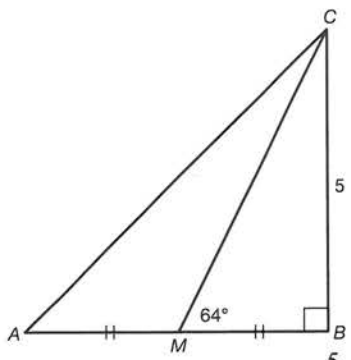
Bladzijde 226

141 $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{2x} = 1\frac{1}{2}x + \dfrac{2}{x} = 1\frac{1}{2}x + 2x^{-1}$ geeft $f'(x) = 1\frac{1}{2} - 2x^{-2} = 1\frac{1}{2} - \dfrac{2}{x^2}$
Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(1) = 1\frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ f(1) = 3\frac{1}{2}\text{, dus } A\left(1, 3\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} + b = 3\frac{1}{2} \\ b = 4 \end{array}$$

Dus k: $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

142



In $\triangle MBC$ geldt $\tan(64°) = \dfrac{5}{BM}$

$$BM = \frac{5}{\tan(64°)} = 2{,}438...$$

$$AB = 2 \cdot BM = 2 \cdot 2{,}438... = 4{,}877...$$

In $\triangle ABC$ geldt $\tan(\angle A) = \dfrac{5}{4{,}877...}$

$$\angle A = 47{,}71...°$$

Dus $\angle A \approx 47{,}7°$.

143 Door (2, 0) en (5, 0), dus stel $y = a(x-2)(x-5)$.

$$\left.\begin{array}{l} y = a(x-2)(x-5) \\ \text{door } (6, -3) \end{array}\right\} \begin{array}{l} a(6-2)(6-5) = -3 \\ 4a = -3 \\ a = -\frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $y = -\frac{3}{4}(x-2)(x-5) = -\frac{3}{4}(x^2 - 7x + 10) = -\frac{3}{4}x^2 + 5\frac{1}{4}x - 7\frac{1}{2}$

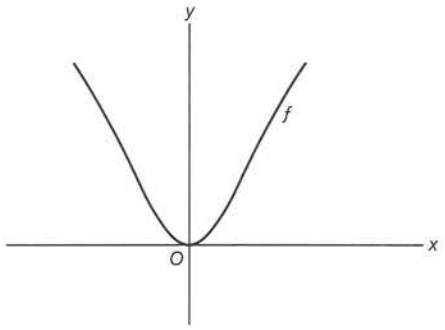
Dit geeft het snijpunt met de y-as $\left(0, -7\frac{1}{2}\right)$.

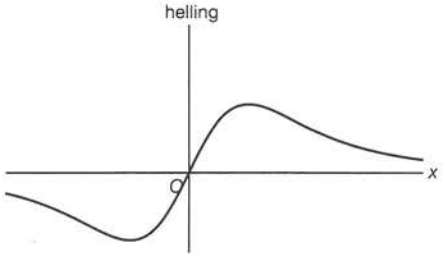
© Noordhoff Uitgevers bv

144 $k \parallel l$, dus $a = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{2}x + b \\ \text{door } P(-2, 5) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -\frac{1}{2} \cdot -2 + b = 5 \\ 1 + b = 5 \\ b = 4 \end{array}$$

145 Voer in $y_1 = \dfrac{10x^2}{x^2 + 10}$ en $y_2 = \left[\dfrac{dy_1}{dx}\right]_{x=x}$.





146 $\dfrac{2x}{x-1} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{2x(x+1) - x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{2x^2 + 2x - x^2 + x}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x^2 + 3x}{(x-1)(x+1)}$

147 $N = 15 \cdot \sqrt[4]{100x} = 15 \cdot \sqrt[4]{100} \cdot \sqrt[4]{x} \approx 47{,}43 \cdot \sqrt[4]{x}$
Dus $N = 47{,}43 \cdot \sqrt[4]{x}$.

148 $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 11 \\ 5x + 2y = 18 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array}\right|$ geeft $\left\{\begin{array}{l} 4x - 6y = 22 \\ 15x + 6y = 54 \end{array}\right.$ +

$19x = 76$
$x = 4$

$$\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ 2x - 3y = 11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 4 - 3y = 11 \\ 8 - 3y = 11 \\ -3y = 3 \\ y = -1 \end{array}$$

Dus de oplossing is $(x, y) = (4, -1)$.

149 $(4x - 3)(3x + 5) = 0$
$4x - 3 = 0 \vee 3x + 5 = 0$
$x = \frac{3}{4} \vee x = -1\frac{2}{3}$

150 De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $6^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos(\angle A)$

$$\begin{array}{l} 36 = 16 + 9 - 24\cos(\angle A) \\ 24\cos(\angle A) = -11 \\ \cos(\angle A) = -\frac{11}{24} \\ \angle A = 117{,}27...^\circ \end{array}$$

Dus $\angle A \approx 117{,}3^\circ$.

© Noordhoff Uitgevers bv

151 $\frac{1}{2}(2x-5)^2+3=5$

$\frac{1}{2}(2x-5)^2=2$
$(2x-5)^2=4$
$2x-5=2 \vee 2x-5=-2$
$2x=7 \vee 2x=3$
$x=3\frac{1}{2} \vee x=1\frac{1}{2}$

152 $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 12x-5y=3 \end{cases} \left| \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right|$ geeft $\begin{cases} 10x+5y=30 \\ 12x-5y=3 \end{cases}$ +

$22x=33$

$\left.\begin{matrix} x=1\frac{1}{2} \\ 2x+y=6 \end{matrix}\right\}$ $2\cdot 1\frac{1}{2}+y=6$
$3+y=6$
$y=3$

Dus het snijpunt is $(1\frac{1}{2}, 3)$.

153 $g_{\text{jaar}}=0{,}947$

$0{,}947^T=\frac{1}{2}$ geeft $T={}^{0{,}947}\log(\frac{1}{2})=12{,}728...$

12,728... jaar is 12 jaar en ongeveer 9 maanden.

154 $\sin(\frac{3}{4}x)=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{3}{4}x=-\frac{1}{3}\pi+k\cdot 2\pi \vee \frac{3}{4}x=\pi-{-\frac{1}{3}}\pi+k\cdot 2\pi$

$x=-\frac{4}{9}\pi+k\cdot 2\frac{2}{3}\pi \vee x=1\frac{7}{9}\pi+k\cdot 2\frac{2}{3}\pi$

x op $[0, 2\pi]$ geeft $x=1\frac{7}{9}\pi$.

155 k en l vallen samen als $\frac{a}{3}=\frac{-2}{4}=\frac{5}{c}$.

$\frac{a}{3}=\frac{-2}{4}$ geeft $a=\frac{-2\cdot 3}{4}=-1\frac{1}{2}$ en $\frac{-2}{4}=\frac{5}{c}$ geeft $c=\frac{4\cdot 5}{-2}=-10$
Dus $a=-1\frac{1}{2}$ en $c=-10$.

Bladzijde 227

156 $\left.\begin{matrix} y=\frac{a}{x\sqrt{x}} \text{ ofwel } a=y\cdot x\sqrt{x} \\ x=2 \text{ en } y=6 \end{matrix}\right\}$ $a=6\cdot 2\sqrt{2}=12\sqrt{2}$

Dus $y=\frac{12\sqrt{2}}{x\sqrt{x}}$.

$x=8$ geeft $y=\frac{12\sqrt{2}}{8\sqrt{8}}=\frac{12\sqrt{2}}{16\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$.

157 $x^4+5=6x^2$
$x^4-6x^2+5=0$
$(x^2-1)(x^2-5)=0$
$x^2=1 \vee x^2=5$
$x=1 \vee x=-1 \vee x=\sqrt{5} \vee x=-\sqrt{5}$

158 c: $x^2+y^2-2x+2y-3=0$
$x^2-2x+y^2+2y-3=0$
$(x-1)^2-1+(y+1)^2-1-3=0$
$(x-1)^2+(y+1)^2=5$
Dus $M(1, -1)$ en $r=\sqrt{5}$.

$d(A, M)=\sqrt{(4-1)^2+(5--1)^2}=\sqrt{9+36}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

$d(A, c)=d(A, M)-r=3\sqrt{5}-\sqrt{5}=2\sqrt{5}$

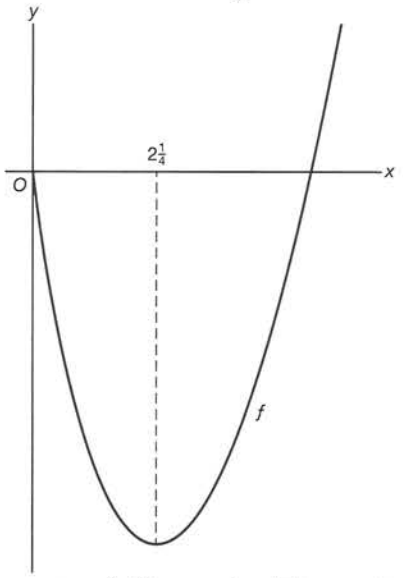
© Noordhoff Uitgevers bv

159 De tijdsintervallen in de tabel zijn gelijk.
$\frac{269}{250} = 1{,}076$, $\frac{290}{269} = 1{,}0780...$, $\frac{312}{290} = 1{,}0758...$ en $\frac{336}{312} = 1{,}0769...$
De uitkomsten zijn vrijwel gelijk dus er is sprake van een exponentieel verband met $g_{3\text{ dagen}} \approx 1{,}077$.
Dit geeft $g_{\text{dag}} = 1{,}077^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}0250...$
Dus $H = 250 \cdot 1{,}025^t$.

160 $\frac{x^2-2}{x^2+2} = \frac{x^2-2}{x+4}$
$x^2 - 2 = 0 \vee x^2 + 2 = x + 4$
$x^2 = 2 \vee x^2 - x - 2 = 0$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee (x+1)(x-2) = 0$
$x = \sqrt{2} \vee x = -\sqrt{2} \vee x = -1 \vee x = 2$
vold. vold. vold. vold.

161 $y = \frac{1}{4} \cdot (3x)^{-2} \cdot \frac{8}{x^{-5}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(3x)^2} \cdot 8x^5 = \frac{8x^5}{4 \cdot 9x^2} = \frac{2}{9}x^3$
Dus $y = \frac{2}{9}x^3$.

162 $f(x) = 4x\sqrt{x} - 9x = 4x^{1\frac{1}{2}} - 9x$ geeft $f'(x) = 6x^{\frac{1}{2}} - 9 = 6\sqrt{x} - 9$
$f'(x) = 0$ geeft $6\sqrt{x} - 9 = 0$
$6\sqrt{x} = 9$
$\sqrt{x} = 1\frac{1}{2}$
$x = 2\frac{1}{4}$



min. is $f\left(2\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot 2\frac{1}{4} \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}} - 9 \cdot 2\frac{1}{4} = -6\frac{3}{4}$.

163 $PQ = 6 - 2p$
$A = (6-2p)\left(-\frac{1}{2}p^2 + 3p\right) = -3p^2 + 18p + p^3 - 6p^2 = p^3 - 9p^2 + 18p$
$\frac{dA}{dp} = 3p^2 - 18p + 18$
$\frac{dA}{dp} = 0$ geeft $3p^2 - 18p + 18 = 0$
$p^2 - 6p + 6 = 0$
$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 12$
$p = \frac{6 - 2\sqrt{3}}{2} = 3 - \sqrt{3} \vee p = 3 + \sqrt{3}$
vold. vold. niet
Dus voor $p = 3 - \sqrt{3}$.

© Noordhoff Uitgevers bv

164 $\angle R = 180° - 62° - 48° = 70°$

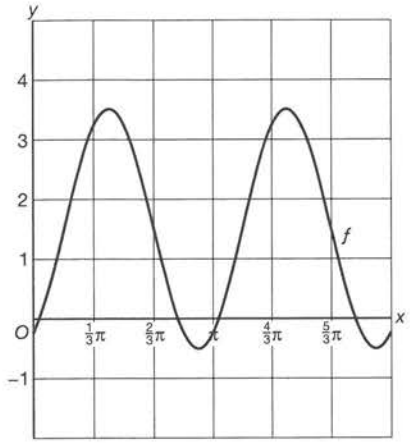
De sinusregel in $\triangle PQR$ geeft $\dfrac{PQ}{\sin(70°)} = \dfrac{8{,}4}{\sin(48°)}$

$$PQ = \frac{8{,}4 \cdot \sin(70°)}{\sin(48°)} = 10{,}621...$$

Dus $PQ \approx 10{,}6$.

165 $f(x) = 1\frac{1}{2} + 2\sin\left(2x - \frac{1}{3}\pi\right) = 1\frac{1}{2} + 2\sin\left(2\left(x - \frac{1}{6}\pi\right)\right)$

evenwichtsstand $1\frac{1}{2}$
amplitude 2
periode $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$
stijgend door beginpunt $\left(\frac{1}{6}\pi, 1\frac{1}{2}\right)$



166 $3x^4 - 5 = 16$
$3x^4 = 21$
$x^4 = 7$
$x = \sqrt[4]{7} \vee x = -\sqrt[4]{7}$

167 $\frac{1}{2}\log(2x - 1) + 3 = 0$
$\frac{1}{2}\log(2x - 1) = -3$
$2x - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
$2x - 1 = 8$
$2x = 9$
$x = 4\frac{1}{2}$

Bladzijde 228

168 $f(x) = \frac{1}{5}x^4 - 2x^3 + x$ geeft $f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - 6x^2 + 1$

Stel k: $y = ax + b$ met $a = f'(-1) = -\frac{4}{5} - 6 + 1 = -5\frac{4}{5}$.

$$\left.\begin{array}{l} y = -5\frac{4}{5}x + b \\ f(-1) = 1\frac{1}{5}, \text{ dus } A\left(-1, 1\frac{1}{5}\right) \end{array}\right\} \begin{array}{l} -5\frac{4}{5} \cdot -1 + b = 1\frac{1}{5} \\ 5\frac{4}{5} + b = 1\frac{1}{5} \\ b = -4\frac{3}{5} \end{array}$$

Dus k: $y = -5\frac{4}{5}x - 4\frac{3}{5}$.

169 $\left.\begin{array}{l} l \,//\, k, \text{ dus } l\text{: } 3x - y = b \\ \text{door } (5, -1) \end{array}\right\} b = 3 \cdot 5 + 1 = 16$

Dus l: $3x - y = 16$.

© Noordhoff Uitgevers bv

170 Stel $P = a \cdot g^R$ met $g = \frac{30}{50} = 0{,}6$

$$\left.\begin{array}{l} P = a \cdot 0{,}6^R \\ P = 50 \text{ en } R = 0{,}92 \end{array}\right\} a \cdot 0{,}6^{0{,}92} = 50$$

$$a = \frac{50}{0{,}6^{0{,}92}} = 79{,}99...$$

Dus $P = 80 \cdot 0{,}6^R$.

$$\left.\begin{array}{l} P = 80 \cdot 0{,}6^R \\ R = 3{,}20 \end{array}\right\} P = 80 \cdot 0{,}6^{3{,}20} = 15{,}60...$$

Dus $P \approx 15{,}6$.

171 $(x^2 - 4)\sqrt{x} = x^3 - 4x$

$(x^2 - 4)\sqrt{x} = x(x^2 - 4)$

$x^2 - 4 = 0 \vee \sqrt{x} = x$

$x^2 = 4 \vee x = x^2$ (na kwadrateren)

$x = 2 \vee x = -2 \quad \vee \quad x = 0 \vee 1 = x$

vold. vold. niet vold. vold.

Dus $x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2$.

172
$$\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0 \\ y = \frac{1}{3}x + b \end{array}\right\} \begin{array}{l} x^2 + \left(\frac{1}{3}x + b\right)^2 - 8x + 2\left(\frac{1}{3}x + b\right) + 7 = 0 \\ x^2 + \frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}bx + b^2 - 8x + \frac{2}{3}x + 2b + 7 = 0 \\ \frac{10}{9}x^2 + \left(\frac{2}{3}b - 7\frac{1}{3}\right)x + b^2 + 2b + 7 = 0 \end{array}$$

Raken, dus $D = 0$

$$\left(\tfrac{2}{3}b - \tfrac{22}{3}\right)^2 - 4 \cdot \tfrac{10}{9} \cdot (b^2 + 2b + 7) = 0$$

$$\tfrac{4}{9}b^2 - \tfrac{88}{9}b + \tfrac{484}{9} - \tfrac{40}{9}b^2 - \tfrac{80}{9}b - \tfrac{280}{9} = 0$$

$$4b^2 - 88b + 484 - 40b^2 - 80b - 280 = 0$$

$$-36b^2 - 168b + 204 = 0$$

$$3b^2 + 14b - 17 = 0$$

$$D = 14^2 - 4 \cdot 3 \cdot -17 = 400$$

$$b = \frac{-14 - 20}{6} \vee b = \frac{-14 + 20}{6}$$

$$b = -5\tfrac{2}{3} \vee b = 1$$

173 $R(p) = 25p - (p^2 - 1) = 25p - p^2 + 1$ geeft $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = 25 - 2p$

174 $f(x) = 2px^3 - px^2 + p^2$ geeft $f'(x) = 6px^2 - 2px$

175 $g_{\text{jaar}} = 1{,}075$

$1{,}075^T = 2$ geeft $T = {}^{1{,}075}\log(2) = 9{,}584...$

Dus de verdubbelingstijd is 9 jaar en ongeveer 7 maanden.

176
$$\left.\begin{array}{l} y = ax^2 + 1\frac{1}{2}x + 3 \\ \text{door } (2, 9) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 4a + 6 = 9 \\ 4a = 3 \\ a = \frac{3}{4} \end{array}$$

Dus $y = \frac{3}{4}x^2 + 1\frac{1}{2}x + 3$.

$$x_{\text{top}} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}} = -1$$

$$y_{\text{top}} = \tfrac{3}{4} \cdot (-1)^2 + 1\tfrac{1}{2} \cdot -1 + 3 = 2\tfrac{1}{4}$$

Dus de top is $\left(-1, 2\frac{1}{4}\right)$.

177
$$\left.\begin{array}{l} 2x - 3y = 27 \\ \text{door } A(3, p) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2 \cdot 3 - 3 \cdot p = 27 \\ 6 - 3p = 27 \\ -3p = 21 \\ p = -7 \end{array}$$

© Noordhoff Uitgevers bv

178 $F = 10 - \dfrac{K}{K+1}$

$\dfrac{K}{K+1} = 10 - F$

$K = (K+1)(10-F)$

$K = 10K - FK + 10 - F$

$FK - 9K = 10 - F$

$K(F-9) = 10 - F$

$K = \dfrac{10-F}{F-9}$

179 De lijn l staat loodrecht op k en gaat door het punt M.

k: $x + 2y = 4$ geeft l: $2x - y = c$ door $M(3, -2)$ $\Big\}$ $c = 2 \cdot 3 - -2 = 8$

Dus l: $2x - y = 8$.

l snijden met k geeft het snijpunt S.

$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right|$ geeft $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 4x - 2y = 16 \end{cases}$ +

$5x = 20$

$\left.\begin{matrix} x = 4 \\ x + 2y = 4 \end{matrix}\right\}$ $4 + 2y = 4$

$2y = 0$

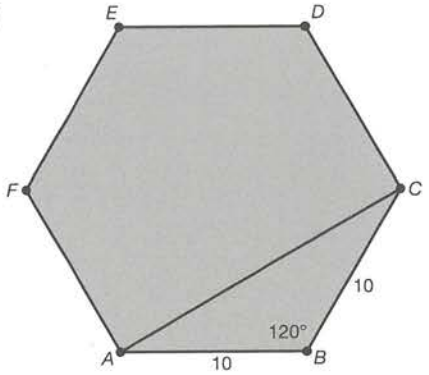
$y = 0$

Dus $S(4, 0)$.

$r = d(M, k) = d(M, S) = \sqrt{(4-3)^2 + (0 - -2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Dus c: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 5$.

180

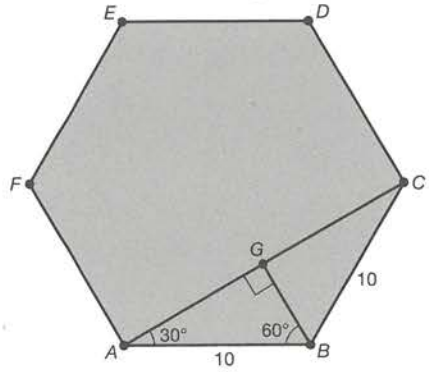


De cosinusregel in $\triangle ABC$ geeft $AC^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos(120°) = 300$

$AC = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$

Alternatieve uitwerking

Teken BG loodrecht op AC.



$BG = \dfrac{10}{2} = 5$ en $AG = 5\sqrt{3}$

$AC = 2 \cdot AG = 10\sqrt{3}$

© Noordhoff Uitgevers bv

Bladzijde 229

181 De lijn gaat door de punten (3, 3) en (11, 2).

$\log(N) = pM + q$ met $p = \dfrac{2-3}{11-3} = -\frac{1}{8}$

$\left.\begin{array}{l}\log(N) = -\frac{1}{8}M + q \\ \text{door } (3,3)\end{array}\right\}$ $-\frac{1}{8}\cdot 3 + q = 3$

$q = 3\frac{3}{8}$

Dus $\log(N) = -\frac{1}{8}M + 3\frac{3}{8}$

$N = 10^{-\frac{1}{8}M + 3\frac{3}{8}}$

$N = 10^{-\frac{1}{8}M} \cdot 10^{3\frac{3}{8}}$

$N = 10^{3\frac{3}{8}} \cdot \left(10^{-\frac{1}{8}}\right)^M$

$N \approx 2371 \cdot 0{,}75^M$

Dus $N = 2400 \cdot 0{,}75^M$.

182 $\frac{2}{5}a^{-2} \cdot (b^{-3})^2 = \frac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{a^2} \cdot b^{-6} = \dfrac{2}{5a^2b^6}$

183 $5 \cdot 2^{3x-2} = 80$

$2^{3x-2} = 16$

$2^{3x-2} = 2^4$

$3x - 2 = 4$

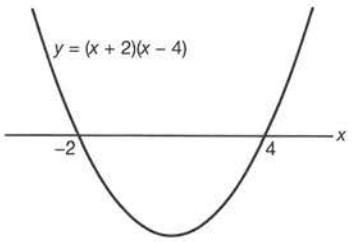
$3x = 6$

$x = 2$

184 $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$

$x^2 - 2x - 8 \leq 0$

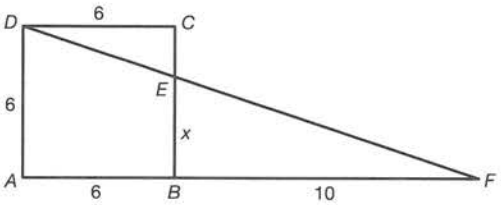
$(x+2)(x-4) \leq 0$



$-2 \leq x \leq 4$, dus $D_f = [-2, 4]$.

185 $f(x) = x^2 - \sqrt{4-9x}$ geeft $f'(x) = 2x - -9 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{4-9x}} = 2x + \dfrac{9}{2\sqrt{4-9x}}$

186



$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C = 90^\circ \\ \angle BFE = AFD\end{array}\right\}$ $\triangle BFE \backsim \triangle AFD$

Uit $\triangle BFE \backsim \triangle AFD$ volgt

$\dfrac{BF}{AF} = \dfrac{BE}{AD}$ en dit geeft $\dfrac{10}{16} = \dfrac{BE}{6}$

Dus $BE = \dfrac{6 \cdot 10}{16} = 3\frac{3}{4}$.

187 $2x\sqrt{3} - x\sqrt{2} = 12$

$x\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right) = 12$

$x = \dfrac{12}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

© Noordhoff Uitgevers bv

188 Voer in $y_1 = \dfrac{100x^2}{x^2+4}$.

De GR geeft $\left[\dfrac{dy}{dx}\right]_{x=4} = 8$

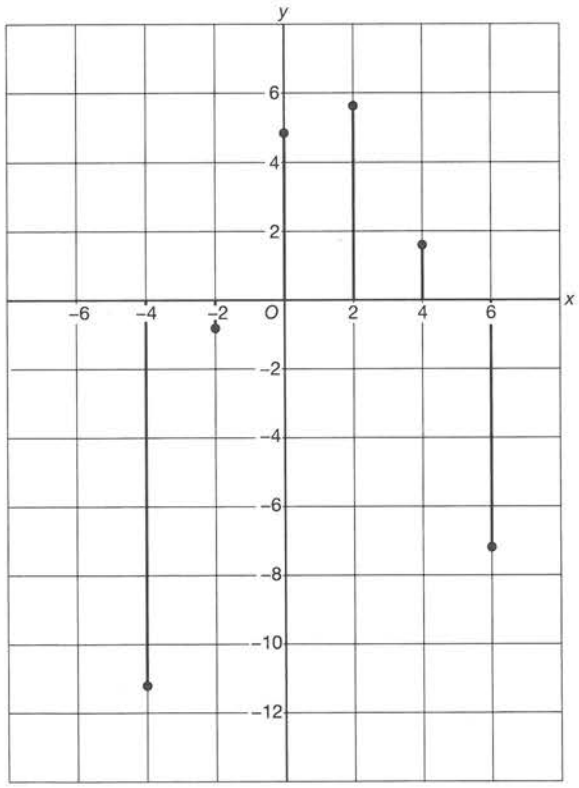
$$\left.\begin{array}{l} y = 8x + b \\ \text{door } (4, 80) \end{array}\right\} \begin{array}{l} 8 \cdot 4 + b = 80 \\ 32 + b = 80 \\ b = 48 \end{array}$$

Dus k: $y = 8x + 48$.

189 $6x - 4y = 5$
$-4y = -6x + 5$
$y = 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{4}$

190 Voer in $y_1 = -0{,}1x^3 + 0{,}1x^2 + 3x - 2$.

x	y	Δy
-6	5,2	
-4	-6	-11,2
-2	-6,8	-0,8
0	-2	4,8
2	3,6	5,6
4	5,2	1,6
6	-2	-7,2



© Noordhoff Uitgevers bv

191 $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 - 8x + 2y + 7 = 0 \\ y = ax + 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x^2 + (ax + 1)^2 - 8x + 2(ax + 1) + 7 = 0 \\ x^2 + a^2x^2 + 2ax + 1 - 8x + 2ax + 2 + 7 = 0 \\ (a^2 + 1)x^2 + (4a - 8)x + 10 = 0 \end{array}$

Raken, dus $D = 0$

$$(4a - 8)^2 - 4 \cdot (a^2 + 1) \cdot 10 = 0$$
$$16a^2 - 64a + 64 - 40a^2 - 40 = 0$$
$$-24a^2 - 64a + 24 = 0$$
$$3a^2 + 8a - 3 = 0$$
$$D = 8^2 - 4 \cdot 3 \cdot -3 = 100$$
$$a = \frac{-8 - 10}{6} \vee a = \frac{-8 + 10}{6}$$
$$a = -3 \vee a = \tfrac{1}{3}$$

Bladzijde 230

192 $y = \dfrac{2x - 3}{x - 1}$

$$xy - y = 2x - 3$$
$$xy - 2x = y - 3$$
$$x(y - 2) = y - 3$$
$$x = \frac{y - 3}{y - 2}$$

193 $\dfrac{2}{\sqrt{5}} + \sqrt{1\tfrac{1}{4}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} + \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \tfrac{2}{5}\sqrt{5} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = \tfrac{9}{10}\sqrt{5}$

194 Stel l: $y = ax + b$ met $a = \dfrac{-1 - 10}{8 - 3} = -2\tfrac{1}{5}$.

$\left.\begin{array}{l} y = -2\tfrac{1}{5}x + b \\ \text{door } A(3, 10) \end{array}\right\}$ $-2\tfrac{1}{5} \cdot 3 + b = 10$

$$-6\tfrac{3}{5} + b = 10$$
$$b = 16\tfrac{3}{5}$$

Dus l: $y = -2\tfrac{1}{5}x + 16\tfrac{3}{5}$.

195 Voer in $y_1 = 3 + 4\sin(x) - 2 + 3\sin\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)$.
De optie maximum geeft de punten (1,9043...; 7,4784...) en (8,1875...; 7,4784...)
De optie minimum geeft het punt (5,0459...; -5,4784...)

evenwichtsstand $\dfrac{7{,}4784... + -5{,}4784...}{2} = 1$

amplitude 7,4784... − 1 = 6,4784...
Voer in $y_2 = 1$.
Intersect geeft $x = 0{,}3335...$
stijgend door beginpunt (0,3335...; 1)
periode 2π
$s(x) = 1 + 6{,}48\sin(x - 0{,}33)$

196 $y = 10 \cdot 2^{3-2x} = 10 \cdot 2^3 \cdot 2^{-2x} = 10 \cdot 8 \cdot (2^{-2})^x = 80 \cdot \left(\tfrac{1}{4}\right)^x$
Dus $y = 80 \cdot (\tfrac{1}{4})^x$.

© Noordhoff Uitgevers bv

Verantwoording

Omslagontwerp: In Ontwerp, Assen
Ontwerp binnenwerk: Ebel Kuipers, Sappemeer
Technisch tekenwerk: OKS, Delhi (India)
Lay-out: OKS, Delhi (India)

MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

0 / 16

© 2016 Noordhoff Uitgevers bv, Groningen/Houten, The Netherlands.

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet van 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever. Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Reprorecht (Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van (een) gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.stichting-pro.nl).

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording or otherwise without prior written permission of the publisher.

ISBN 978-90-01-84205-5

GETAL& RUIMTE

J.H. Dijkhuis
C.J. Admiraal
J.A. Verbeek
G. de Jong
H.J. Houwing
J.D. Kuis
F. ten Klooster
S.K.A. de Waal
J. van Braak
J.H.M. Liesting-Maas
M. Wieringa
M.L.M. van Maarseveen
R.D. Hiele
J.E. Romkes
M. Haneveld
S. Voets
I. Cornelisse

Noordhoff Uitgevers

FSC www.fsc.org
MIX
Papier van verantwoorde herkomst
FSC® C118189

ISBN 978-90-01-84205-5
9 789001 842055

www.getalenruimte.noordhoff.nl